matemática moderna

Papy

III

EDITORIAL UNIVERSITARIA DE BUENOS AIRES

MATEMÁTICA MODERNA

GEORGES PAPY

"La matemática que, a principio de siglo, apenas tenía aplicación fuera de la física y del arte del ingeniero, se ha convertido en elemento fundamental del humanismo contemporáneo y en herramienta indispensable en la mayoría de los dominios del pensamiento, de la ciencia y de la técnica", sostiene el autor del presente libro, y de este hecho innegable deduce la necesidad de enseñar los principios matemáticos básicos a todos los estudiantes secundarios.

Matemática moderna es una obra destinada a profesores y alumnos de la escuela media, pero útil a todos quienes busquen una versión actual de la ciencia. En su lengua original ha llegado ya a los seis volúmenes, inmediatamente traducidos a otros idiomas. Este tercer tomo que presenta EUDEBA se ocupa de los siguientes temas: simetrías centrales, paralelas y ortogonales, isometrías, desplazamientos, rotaciones, grupo de desplazamientos, inversiones, distancia, circunferencias, producto escalar, cálculo en el vectorial euclidiano plano, desigualdades, el grupo de los ángulos y su cálculo, raíz cuadrada, circunferencia y

Matemática moderna

Tomo III

He aquí a Euclides

LA ESCUELA EN EL TIEMPO
Textos del secundario/Matemática

PAPY
con la colaboración de
Frédérique Papy

MATEMATICA MODERNA

Tomo III

He aquí a Euclides

EDITORIAL UNIVERSITARIA DE BUENOS AIRES

Título de la obra original
Mathématique moderne
Marcel Didier, Éditeur, 1967

Traducida por
Eutimio Merino e Irma Dumrauf

La revisión técnica estuvo a cargo de
Estela O. de González Baró

© 1970
Editorial Universitaria de Buenos Aires
Rivadavia 1571/73

Sociedad de Economía Mixta
Fundada por la Universidad de Buenos Aires

Hecho el depósito de ley
IMPRESO EN LA ARGENTINA - PRINTED IN ARGENTINA

A Celestino Galli

Prefacio

. . . he aquí a EUCLIDES

¡Gloria a EUCLIDES!

¡Abajo EUCLIDES!

JEAN DIEUDONNÉ

¡Muerte al TRIANGULO!

JEAN DIEUDONNÉ

. . . EUCLID is the greatest schoolmaster known in the history of mathematics . . .
. . . All of us, classical and modern mathematicians, are his pupils.

B. L. VAN DER WAERDEN

Si EUCLIDES volviera con nosotros
Entonces . . . sería Bourbakista

ANDRÉ REVUZ

Los Elementos *de* EUCLIDES *exponían la matemática básica de su tiempo, alrededor de 300 años a. C.*

La obra monumental de Nicolás BOURBAKI *presenta, en el más alto nivel, la matemática básica de hoy.*

Los [MM] desean exponer los Elementos *de la matemática básica de hoy a los adolescentes . . . y a las personas de cualquier edad y formación que deseen iniciarse en la matemática de nuestro tiempo.*

No nos limitamos a las adquisiciones recientes de la matemática básica elemental de hoy.

DEFINICION CONVENCIONAL

Matemática moderna = Visión moderna de la matemática

Durante el último medio siglo, la matemática pasó de la etapa artesanal a la etapa industrial. Las máquinas-herramientas de nuestras fábricas permiten economizar la energía muscular del hombre. Las grandes estructuras de la matemática contemporánea permiten realizar economías de pensamiento. Las máquinas-herramientas "grupos" han hecho su aparición desde [MM1]. En [MM2], los grupos han sido utilizados como máquinas en la construcción del campo real y del vectorial plano, otras estructuras fundamentales.

Los Elementos *de* EUCLIDES *se desarrollan en el marco platoniano del espacio físico idealizado. Durante mucho tiempo, a éste se lo vio como inmutable e inevitable. Una de las primeras dudas modernas aparece con Kant quien intenta probar la imposibilidad de desarrollar la geometría fuera del marco espacio-temporal y de la lógica de Aristóteles.*

A la manera de los filósofos que probaban la existencia del movimiento, corriendo, los matemáticos han puesto punto final a esta controversia creando las geometrías no euclidianas. Escapaban así del marco de la geometría euclidiana y la bella unidad de los Elementos *se encontraba en peligro.*

La crítica del punto de vista euclidiano se agudizó más aún cuando los lógicos demostraron que era no sólo posible crear matemática con otras lógicas que no fuera la de Aristóteles, sino que hasta resultaba imposible desarrollar rigurosamente la geometría euclidiana con los únicos recursos de la lógica aristotélica.

La creación del cálculo diferencial e integral iba a introducir en la matemática maneras de pensar aparentemente nuevas no del todo alejadas de las brumas metafísicas. En el momento de la crisis que sufrió el análisis matemático durante el siglo XIX se estaba por cierto muy lejos de la magnífica claridad de los Elementos *de* EUCLIDES.

En ciertos casos, razonamientos vagamente metafísicos permitían obtener, en análisis, resultados correctos, preciosos en las aplicaciones. En otras circunstancias, indiscernibles de las precedentes para el contemporáneo, razonamientos análogos introducían irremediables contradicciones. La matemática había perdido una de sus cualidades esenciales, la fidelidad. El usuario no podía ya utilizar el instrumento matemático con toda confianza.

La teoría de los conjuntos, debida al genio de Cantor, ha permitido una reconstrucción rigurosa del análisis matemático. A través del análisis los conjuntos se han introducido progresivamente en la enseñanza universitaria.

El universo conjuntista constituye hoy el nuevo marco unitario de la matemática.

Las brumas metafísicas se han disipado. Es posible razonar de la misma manera en todos los dominios de la matemática y utilizar por doquier las mismas grandes estructuras.

Matemática Moderna	=	Exposición de la matemática que utiliza Conjuntos y Grandes Estructuras.

* * *

Al comenzar el actual movimiento de reforma de la enseñanza de la matemática, se planteó a menudo la pregunta acerca del lugar reservado a la geometría en esta renovación. Se puede contestar hoy con absoluta tranquilidad que ese lugar sigue siendo eminente y primordial. La obra que hemos llevado a cabo sin apriorismo en favor de la geometría nos ha convencido de que el soporte intuitivo y gráfico sigue siendo esencial para la adquisición de los conceptos más modernos y abstractos.

* * *

Los tres primeros [*MM*] *deben convencer de que la actual reforma no es obra de iconoclastas. Nada se ha perdido.*

Los resultados antiguos aparecen bajo una nueva luz y su importancia relativa se ve a menudo profundamente modificada.

Ciertas proposiciones, antes fundamentales, se han reducido a la categoría de simples corolarios. Que dejen ya *de sobrecargar la memoria de nuestros alumnos. En caso de necesidad, encontrarán esos resultados haciendo funcionar, de manera rutinaria, una u otra de las máquinas-herramientas de la matemática moderna.*

La ventaja pedagógica de esta situación es innegable. A igualdad de conocimientos, los alumnos que gozan de una enseñanza moderna deben retener menos. Ya no deben cargar su memoria con cantidades de hechos dispares y los resultados fundamentales se expresan simplemente en una organización estructurada que facilita su inteligibilidad.

¡Abajo EUCLIDES!

La organización y la manera de pensar de los Elementos *han sido superadas. Enseñarlas inculcaría malos hábitos mientras que hay medios para ir directamente del conocimiento común a las estructuras y al punto de vista moderno.*

¡Muerte al TRIANGULO!

La anticuada técnica artesanal de los casos de igualdad de los triángulos debe ser abandonada en beneficio de las translaciones, rotaciones y rebatimientos, mucho más intuitivos y cuyo alcance supera ampliamente el ámbito de la simple geometría elemental.

* * *

El planteo moderno de la geometría reencuentra los resultados anteriores pero no se limita a este objetivo. La enseñanza moderna de la geometría plana no es tan sólo un planteo nuevo de resultados conocidos desde hace mucho tiempo. En este libro, se introducirá especialmente la noción muy moderna de espacio vectorial con producto escalar cuya importancia es fundamental en toda la matemática y cuyo alcance supera ampliamente el ámbito de la geometría elemental.

* * *

En este volumen se sigue adoptando el método axiomático del físico. No se trata de definiciones por axiomas sino más bien de una descripción por axiomas, es decir por proposiciones aceptadas y lógicamente utilizables.

La enseñanza de la geometría debe utilizar axiomas desde el ciclo inferior del secundario, puesto que sin ellos es imposible elaborar un razonamiento y una demostración. Esta enseñanza rigurosa debe favorecer la intuición geométrica global.

Se tratará, pues, de los 12 a los 15 años, de no manejar axiomas originales, al presentar modelos que sólo satisfacen a algunos de esos axiomas. Se llegaría así a representaciones patológicas de los conceptos geométricos, que pueden ser peligrosas en el momento de la formación de la intuición. Se correría el riesgo de perturbar el espíritu introduciendo duda y escepticismo.

Evitemos dar a los alumnos la impresión de que la matemática es un juego gratuito de axiomas elegidos por capricho. Los alumnos no comprenderán la utilidad de cambiar ciertos axiomas sino en el caso en que esta modificación permita descubrir nuevas estructuras que presenten un interés.

* * *

El objeto esencial del presente volumen es el de exponer la geometría métrica plana en el marco del vectorial plano, tal como ha sido presentado en [MM2]. Se utilizará de manera fundamental el grupo de las isometrías engendrado por las simetrías ortogonales. El alumno tendrá acceso finalmente a la noción de producto escalar y el curso termina con la puesta en evidencia de la estructura del vectorial con producto escalar euclidiano. La última parte de la enseñanza se desarrolla haciendo funcionar sistemáticamente esta maravillosa máquina-herramienta.

* * *

Como sus predecesores [MM3] es el resultado de numerosos años de enseñanza, especialmente en las clases de niños de 14 a 15 años.

Su contenido corresponde al programa moderno belga.

Los once primeros capítulos de esta obra constituyen la parte fundamental de la misma y conducen al alumno de los axiomas intuitivos originales a la estructura del vectorial euclidiano plano.

Después de esta enseñanza, se introduce el grupo de los ángulos en el capítulo 14.

Los capítulos 1 a 11 y 14 deben constituir el corazón de la enseñanza de la geometría a los niños de 14 a 15 años.

Según el tiempo de que disponga, el grado de adelanto de los alumnos y la importancia de los asuetos dispuestos por las autoridades escolares, el profesor elegirá entre los temas de los demás capítulos que presentan una gama muy rica y variada de aplicaciones.

Algunos de esos capítulos, especialmente el capítulo 13, indican perspectivas y desarrollos de los puntos que figuran en el programa moderno de la clase de los niños de 15 a 16 años. El buen alumno podrá aprovecharlas.

* * *

Por razones de orden psicológico y pedagógico, la noción métrica de perpendicularidad ha sido introducida a partir de las clases para niños de 12 a 13 años.

Gracias a la noción global de dirección, se había podido desarrollar muy rápidamente una teoría de paralelas y perpendiculares resumida por la tabla de composición del grupo $\{ //\ ,\ \perp \}$, o

o	//	$\perp$
//	//	$\perp$
$\perp$	$\perp$	//

La noción de perpendicularidad no representa ningún papel en [MM2], que presenta una teoría puramente afín del plano.

La introducción de la presente obra recuerda, precisándolas, algunas nociones del vectorial plano y refresca la memoria de los alumnos en lo que concierne a la perpendicularidad.

Los capítulos 1 y 2 son de naturaleza puramente afín. Aunque interesante en sí mismo, el capítulo 1, consagrado a las simetrías centrales, se justifica esencialmente por razones de orden pedagógico. Las simetrías centrales engendran el grupo de las simetrías y translaciones, es decir un grupo que sólo comprende permutaciones ya conocidas. Su estudio constituye una ex-

celente preparación para la geometría métrica fundada en el grupo engendrado por las simetrías ortogonales.

El capítulo 1 introduce el instrumento pedagógico de los puntos numerados. Toda sucesión de puntos numerados designa perfectamente la compuesta de las simetrías que tienen esos puntos como centros. El empleo del color permite representar simultáneamente las compuestas de varias simetrías. Simetrías centrales y sus compuestas son relaciones representadas primeramente por sus esquemas. Los alumnos constatan sin embargo que se efectúa un razonamiento válido ubicándose deliberadamente en el marco de las sucesiones de puntos numerados. Esto ilustra una de las ideas que Caleb GATTEGNO *ha brillantemente esclarecido en la reunión de St. Andrews de la Comisión Internacional para el estudio y el mejoramiento de la enseñanza de la matemática. Una misma situación puede admitir varios niveles de comprensión, utilizando conceptos diferentes y modos de representación algorítmica propios. Un progreso decisivo en la investigación matemática consiste a menudo en pasar de un nivel a otro más elevado.*

En matemática aplicada, cuando la resolución de un problema exige un cambio de comprensión, la expresión final del resultado exige que se efectúe el pasaje en sentido inverso. Es lo que hacen espontáneamente nuestros alumnos. Quedándose en el nivel de los puntos numerados es posible construir el centro de la simetría, compuesta de 17 simetrías centrales. ¡No nos sorprendamos si, después de esta demostración, los alumnos quieren hacer saltar la pulga y verificar que una serie de 17 saltos se reduce a uno!*

Las simetrías paralelas han hecho una tímida aparición en [MM1] y la imagen de una recta mediante una simetría paralela ha sido construida en [MM2]. El capítulo 2 de este volumen reúne las propiedades de las simetrías paralelas que serán utilizadas más adelante.

* * *

El capítulo 3 aborda el estudio métrico del plano mediante la presentación de las simetrías ortogonales. Se introduce allí un segundo axioma métrico muy intuitivo, que afirma la existencia y la unicidad de la bisectriz de toda cupla de semirrectas de mismo origen. Desde el punto de vista matemático, hubiera sido suficiente postular la existencia de esta bisectriz, pues se podría probar su unicidad. Por razones que aparecerán claramente más adelante, pensamos que es preferible, con los alumnos, postular la existencia y la unicidad de esta bisectriz.

---

* *Por alusión al juego* Jeu de puce *(N. del T.)*

En el capítulo 4, las simetrías ortogonales engendran el grupo de las isometrías, presentado mediante la técnica pedagógica de las rectas numeradas. Se reconoce inmediatamente que las translaciones y las simetrías centrales son isometrías. Sin embargo, el grupo de las isometrías aparece globalmente antes del examen individual de las isometrías.

Este examen comienza en el capítulo 5, donde los desplazamientos se hallan presentados primeramente como las composiciones de cuplas de simetrías. Translaciones y rotaciones constituirán el grupo de los desplazamientos. Las translaciones se conocen desde hace tiempo y su grupo ha sido utilizado intensivamente en [MM2].

El capítulo 6 ha sido consagrado al estudio más especial de las rotaciones. Contrariamente a lo que sucede con las simetrías, es posible en este caso establecer que, para toda cupla de semirrectas de mismo origen, existe una rotación que aplica una semirrecta sobre otra. El axioma de la rotación postula la unicidad de esta rotación. Pensamos que con los alumnos es preferible postular la existencia única.

Además de la estructura de espacio vectorial, la primera exposición de la geometría métrica plana reposa sobre tres axiomas:

1. *Axioma de las direcciones perpendiculares.*

2. *Axioma de la bisectriz.*

3. *Axioma de la rotación.*

Los tres postulan una existencia única y los dos últimos conciernen a la misma situación.

Esta presentación axiomática se inspiró parcialmente en un trabajo de Gustave CHOQUET *[A. P. M.].*

El capítulo 6 termina con la presentación de la tercera Samba o Samba métrica. El primer capítulo ya había presentado la Samba de las simetrías centrales que subraya el contenido rítmico del teorema de la compuesta de una cupla de simetrías centrales. La segunda Samba concierne a las compuestas de simetrías ortogonales cuyos ejes son paralelos. Se deduce muy rápidamente de Samba 1.

Los alumnos están ahora preparados para comprender la Samba de las compuestas de simetrías ortogonales cuyos ejes comprenden un punto fijo. Samba 3 permite establecer inmeditamente que el conjunto de las rotaciones de centro fijo es un grupo conmutativo.

Gracias a las Sambas, el estudio del grupo de los desplazamientos, objeto del capítulo 7, es extremadamente fácil y atractivo.

Simetrías y desplazamientos no son las únicas isometrías. El capítulo 8 descubre las simetrías deslizadas y establece que éstas son las únicas isometrías aún no estudiadas.

Cada uno de los capítulos 7 y 8 termina probando que para toda cupla de semirrectas cerradas, existe uno y sólo un desplazamiento (respectivamente uno y sólo un rebatimiento) aplicando la primera de esas semirrectas sobre la segunda.

* * *

El capítulo 9 copia el sistema práctico de la medida de las longitudes rectilíneas. Esta noción se traduce en nuestra enseñanza gracias al hecho fundamental que para toda cupla de semirrectas cerradas, existe una y sólo una aplicación isométrica de la primera sobre la segunda. Habiéndose fijado de antemano y de una vez por todas, la unidad de longitud o metro-patrón, es por consiguiente posible introducir la distancia, como hacen los matemáticos cuando definen los espacios métricos, como una función real positiva de las cuplas de puntos. El cambio de unidad no es un problema métrico, sino un problema afín ya estudiado en [MM2]. El capítulo 9 termina con la demostración clara y neta de un cambio de metro. Anteriormente se había integrado la noción de distancia en la estructura de vectorial mediante la introducción de la norma.

La noción de distancia permite el estudio elemental del círculo en el capítulo 10.

* * *

El punto culminante del libro se encuentra en el capítulo 11 con la introducción del producto escalar y la puesta en evidencia de la estructura de vectorial euclidiano plano. Se ha introducido el producto escalar de manera rigurosa, progresiva e intuitiva a la vez. La máquina-herramienta vectorial euclidiano plano se utiliza de lleno de manera espectacular para establecer ciertas propiedades importantes del triángulo rectángulo. Con el coseno, producto escalar de vectores normados, aparece la trigonometría. El punto de vista unitario adoptado aquí permite apreciables economías de tiempo.

El capítulo 12 pone en movimiento la máquina-herramienta **vectorial euclidiano plano**, *introduce el formulario simple e importante del producto escalar. El teorema de Pitágoras y el Puente del Burro se demuestran por la fórmula del cuadrado de la suma. ¡Se calcula en matemática moderna! ¡Los cálculos no son complicados, no más que antes, puesto que a menudo se aplican las mismas fórmulas que antes! Gracias al producto escalar, la vieja fórmula del cuadrado de una suma adquiere un alcance mucho más grande.*

La enseñanza tradicional ocultaba que $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ *y el teorema de Pitágoras constituyen un único y mismo hecho matemático. A título de ejemplo, se encuentran de manera expeditiva propiedades clásicas que revisten desde ahora un carácter folklórico o anecdótico.*

El capítulo 13 introduce la desigualdad fundamental de Cauchy-Schwarz así como sus sub-productos y especialmente la desigualdad triangular. A fin de permitir una organización ágil de la enseñanza, se retomarán los puntos esenciales de los capítulos 12 y 13 en el comienzo del libro 2 de [MM6] que aborda el segundo estudio del vectorial euclidiano plano según una óptica nueva que resulta de un retorno psicológico. El capítulo 13 termina con el estudio de propiedades de los círculos abiertos, fundamentales en la primera enseñanza de la topología y del análisis.

* * *

El capítulo 14 estudia el grupo conmutativo de los ángulos. Se los ha presentado intuitivamente como rotaciones que han perdido su centro.

En el capítulo 15 se ha desarrollado un cálculo de ángulos, análogo al cálculo vectorial, que permite reencontrar resultados clásicos que han perdido su importancia de antes.

* * *

Hasta aquí, se ha desarrollado la geometría sin utilizar la raíz cuadrada. Interviene inevitablemente para estudiar la intersección de las rectas y los círculos. El capítulo 16 establece la existencia de la raíz cuadrada de todo real positivo. El desarrollo ulterior del curso introducirá, independientemente, la función exponencial a los jóvenes de 17 a 18 años y probará nuevamente, en particular, la existencia de la raíz cuadrada. Por consiguiente, no se podría objetar, en caso de falta de tiempo, la introducción de un axioma provisorio suplementario aquí, aunque la demostración de la existencia dada en el texto sea muy simple. Es inútil cargar el espíritu de nuestros alumnos con el viejo método de cálculo de la raíz cuadrada debido a Tolomeo. Por si interesara a alumnos y profesores, exponemos aquí el método efectivamente utilizado por las máquinas electrónicas. El capítulo termina dando exactamente todo lo que los alumnos deben saber de la ecuación de segundo grado.

El capítulo 17 aplica esos resultados para estudiar la intersección de los círculos y las rectas, según los métodos de la geometría analítica.

El capítulo 18 establece las primeras fórmulas de trigonometría.

El libro termina en el capítulo 19 con un ejemplo del poder mágico de la geometría analítica: cálculo automático de la distancia de un punto a una recta por medio de una ecuación normal de ésta.

*
* *

El lector debe a FRÉDÉRIQUE *el carácter de libro de imágenes de esta exposición a la vez rigurosa e intuitiva de la geometría. Gracias a ella, los niños han estado siempre presentes en el espíritu de los autores. Deseo reiterarle la expresión afectuosa de mi estricta obediencia.*

Las señoras Gilberte CAPIAUX *y Françoise* DARGE, *la señorita Irma* DUMRAUF *y el señor Chris* DE MUNTER, *Asistentes al Centro Belga de Pedagogía de la Matemática, han consagrado toda su dedicación a la corrección de las pruebas y a la ordenación del índice.*

La señora CAGNANT *ha dedicado su talento a la reproducción de los dibujos. La figura 125 de la página 123 se debe al humor del señor Alfred* VERMANDEL, *Asistente en la Universidad de Lovaina. El dibujo definitivo de la tapa es una creación de la señora* CAGNANT, *realizado después de varios proyectos debidos a la señora Françoise* DARGE. *

Deseo expresar mi agradecimiento a esta cohorte de colaboradores eminentes.

PAPY.
Bruxelles, janvier 1967.

* *Se refiere a la edición original.*

Introducción

NOTACIONES

$\omega = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ *conjunto de los* **naturales**

$\omega_0 = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ *conjunto de los* **naturales no nulos**

$Z = \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$ *conjunto de los* **enteros racionales**

$Z_0 = \{1, -1, 2, -2, \ldots\}$ *conjunto de los* **enteros racionales no nulos**

R : *conjunto de los* **reales**

R_0 : *conjunto de los* **reales no nulos**

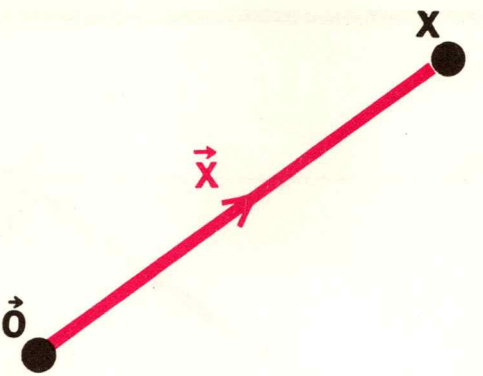
$R^+ = \{r \in R \mid r \geqslant 0\}$ *conjunto de los* **reales positivos**

$R_0^+ = \{r \in R \mid r > 0\}$ *conjunto de los* **reales estrictamente positivos**

$R^- = \{r \in R \mid r \leqslant 0\}$ *conjunto de los* **reales negativos**

$R_0^- = \{r \in R \mid r < 0\}$ *conjunto de los* **reales estrictamente negativos**

CONJUNTOS DE NUMEROS

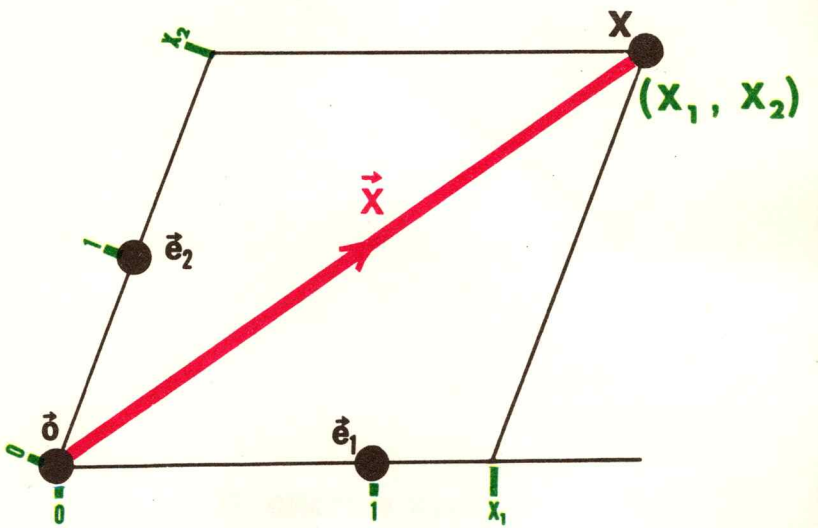


...y el PLANO Π

se identifica con el ESPACIO VECTORIAL

$$R , \Pi_o , +$$

FIG. 1



...y el PLANO Π

...y el ESPACIO VECTORIAL $R, \Pi_o, +$

se identifica con

$$R \times R = R^2$$

FIG. 2

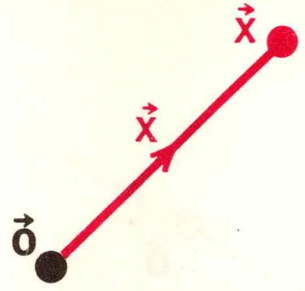


FIG. 3

IDENTIFICACION DE Π Y DE Π_0

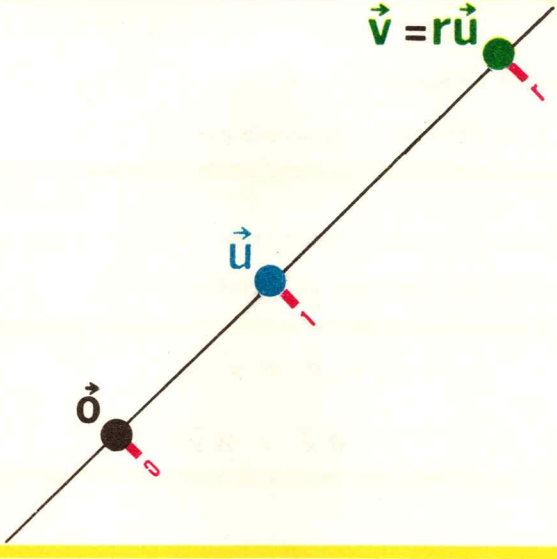


FIG. 4

El vector $\vec{v} = r\vec{u}$ es un múltiplo del vector $\vec{u} \neq \vec{o}$

Si $r \neq 0$, **Entonces** $\vec{v} = r\vec{u}$ **ssi** $\vec{u} = r^{-1} \cdot \vec{v}$

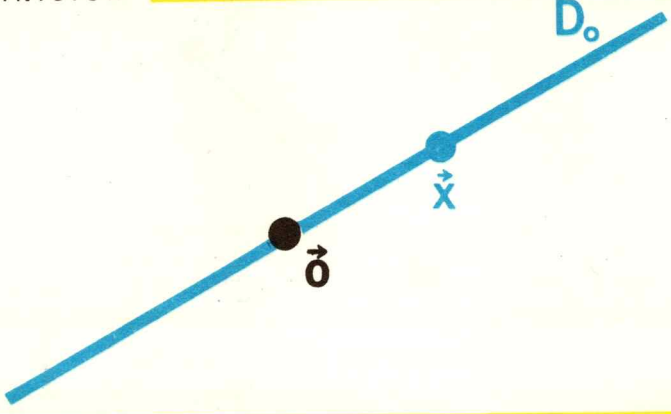
El vector nulo $\vec{o}$ es un múltiplo de todo vector,

ya que para todo vector $\vec{y}$: $\vec{o} = 0 \cdot \vec{y}$

El vector nulo es el único múltiolo de $\vec{o}$, ya que

para todo $r \in \mathbf{R}$: $-\vec{o} = \vec{o}$

DEFINICION



El conjunto $D_o = R\vec{x} = \{ r\vec{x} \mid r \in R \}$

de múltiplos del vector no nulo $\vec{x}$

es la RECTA VECTORIAL engendrada por $\vec{x}$

FIG. 5

Las rectas vectoriales se identifican con las rectas de Π que comprenden a o

El conjunto de rectas vectoriales es expresado por $\mathfrak{D}_o$

Si $\vec{x} \neq \vec{o} \neq \vec{y} \in R\vec{x}$

Entonces $R\vec{x} = R\vec{y}$

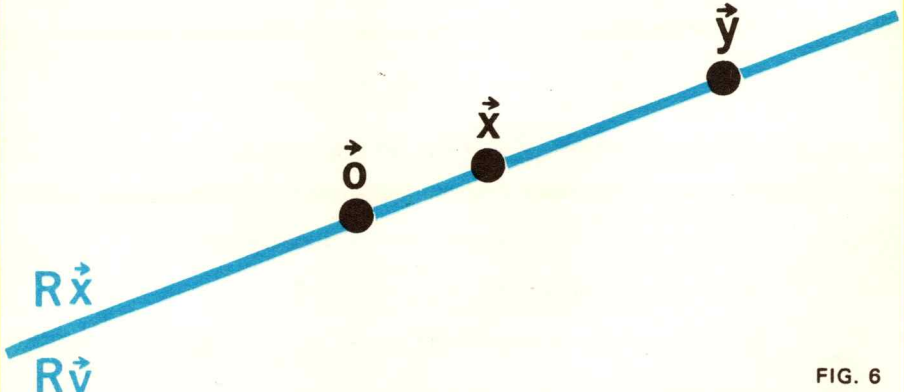


FIG. 6

DEFINICION

Los vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ son **paralelos**

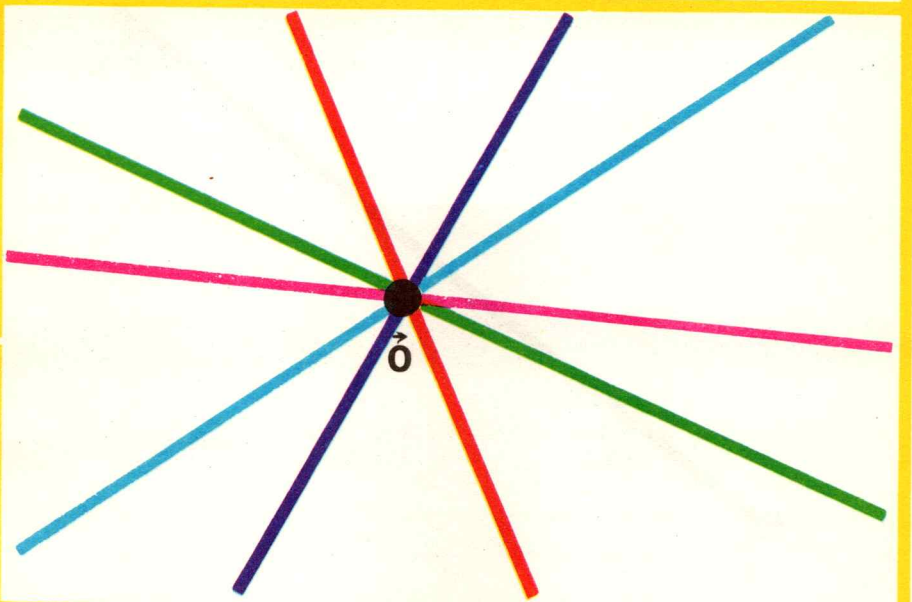
ssi

uno de los vectores $\vec{x}$, $\vec{y}$ *es* **múltiplo del otro**

ssi

$\vec{x}$, $\vec{y}$ **pertenecen a la misma recta vectorial**

El paralelismo es una relación de equivalencia definida en el conjunto de vectores no nulos



CINCO CLASES DE VECTORES PARALELOS NO NULOS

FIG. 7

DEFINICION Para todo vector no nulo $\vec{x}$

$$\mathbf{R}^+\vec{x} = \{ r.\vec{x} \mid r \in \mathbf{R}^+ \}$$

es la

SEMIRRECTA VECTORIAL engendrada por $\vec{x}$

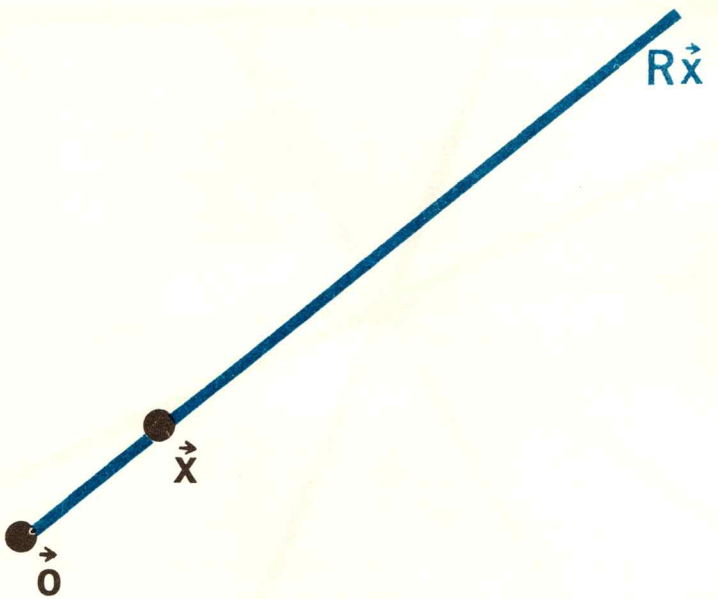


FIG. 8

Las semirrectas vectoriales se identifican con las semirrectas cerradas de origen o de Π

El conjunto de semirrectas vectoriales se anota por $\overline{\mathfrak{D}}_o$

DEFINICION

Los vectores $\vec{x}$, $\vec{y}$ son **paralelos y del mismo sentido**

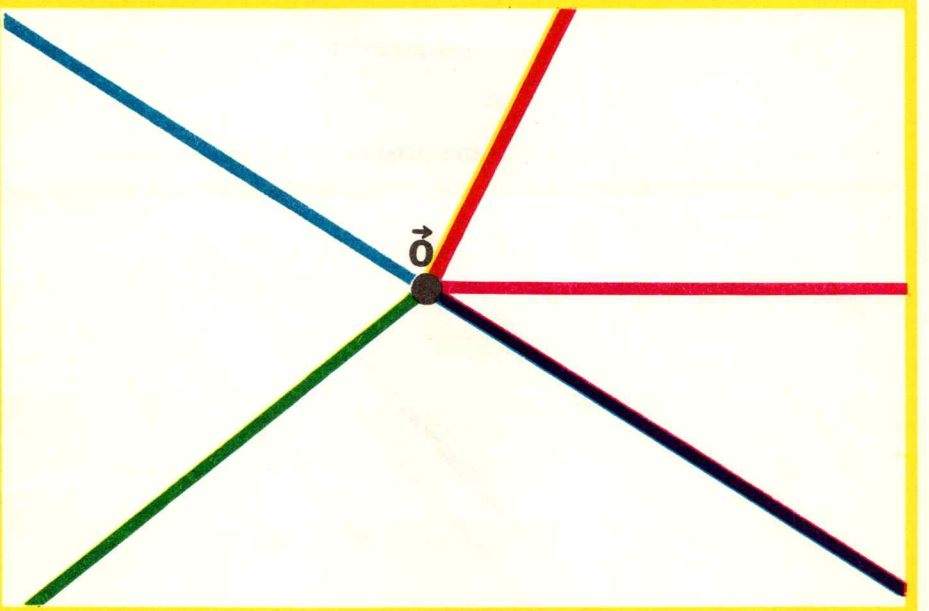
ssi

pertenecen a la misma semirrecta vectorial

La relación

. . . es paralelo y del mismo sentido que . . .

es una equivalencia definida en el conjunto de vectores no nulos.



CINCO CLASES DE EQUIVALENCIA

" . . . es paralelo y del mismo sentido que . . . "

FIG. 9

Para todo $r \in R_0$

Los vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ son paralelos y del mismo sentido

ssi

Los vectores $r.\vec{x}$ y $r.\vec{y}$ son paralelos y del mismo sentido

DEFINICION

Los vectores **x** *e* **y** *son* **paralelos y de sentidos opuestos**

ssi

Los vectores **x** *y* **−y** *son* **paralelos y del mismo sentido**

ssi

Los vectores **−x** *e* **y** *son* **paralelos y del mismo sentido**

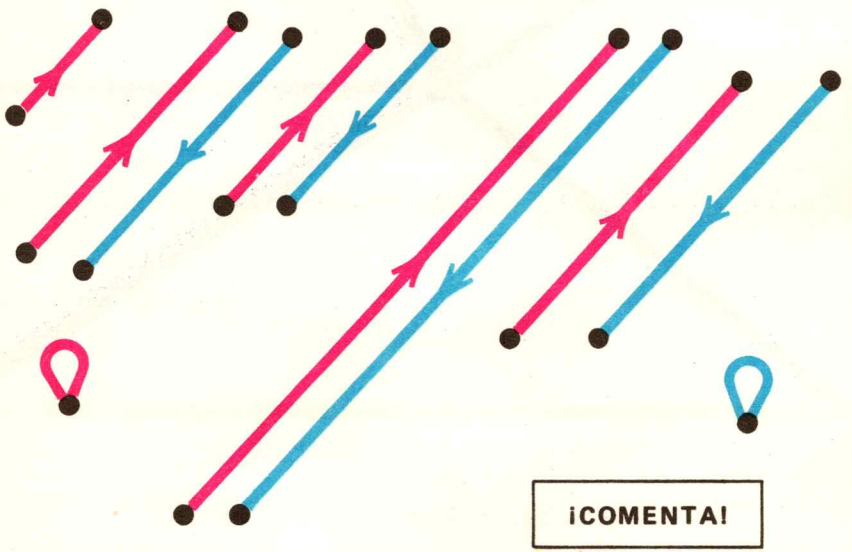
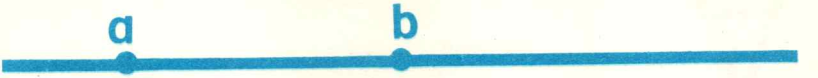


FIG. 10

He aquí puntos distintos $a \neq b$

$\overrightarrow{a.b}$ y $\overrightarrow{b.a}$ son paralelas de sentidos opuestos

Conjunto de los $x \in \Pi$ tales que $\overrightarrow{a.x}$ y $\overrightarrow{x.b}$ sean paralelos

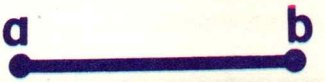


Conjunto de los $x \in \Pi$ tales que $\overrightarrow{a.x}$ y $\overrightarrow{a.b}$ sean paralelos del mismo sentido

Conjunto de los $x \in \Pi$ tales que $\overrightarrow{b.x}$ y $\overrightarrow{b.a}$ sean paralelos del mismo sentido

Conjunto de los $x \in \Pi$ tales que $\overrightarrow{x.b}$ y $\overrightarrow{a.b}$ sean paralelos del mismo sentido

Conjunto de los $x \in \Pi$ tales que $\overrightarrow{a.x}$ y $\overrightarrow{x.b}$ sean paralelos del mismo sentido



¡Justifica!

FIG. 11

ABREVIATURAS

$\forall$	**Para todo**
$\exists$	**Existe un**
$\exists!$	**Existe uno y sólo uno**

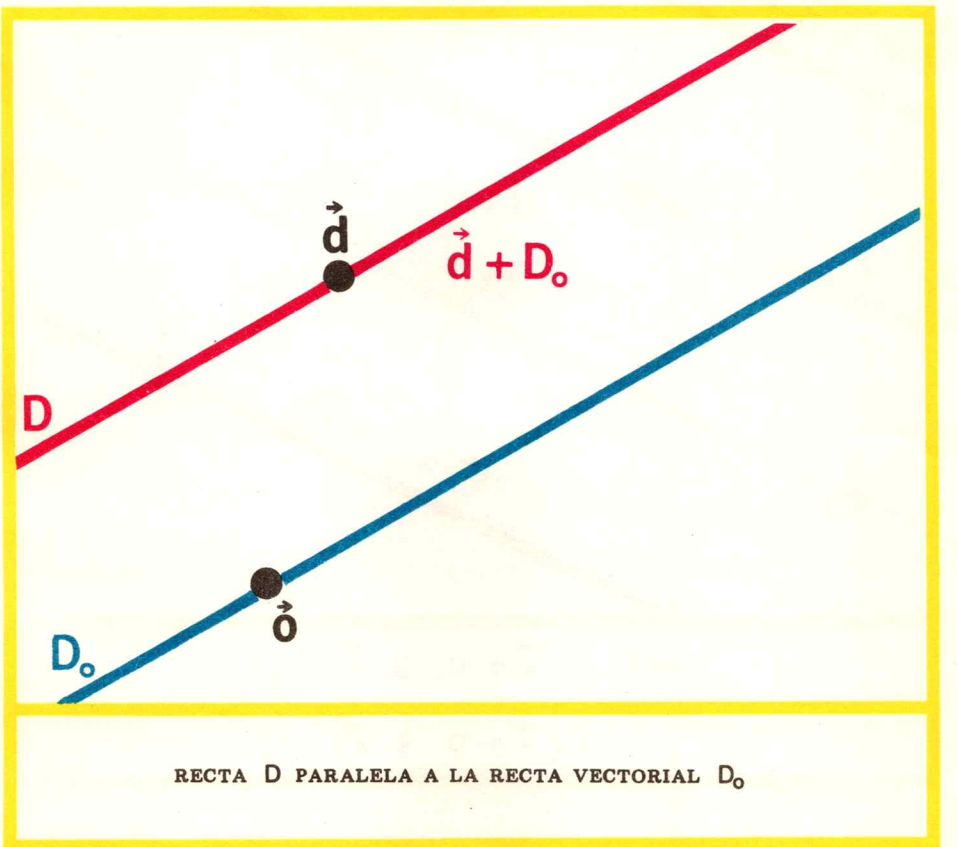
$\forall x \in A$	Para todo x perteneciente a A
$\exists x \in A$	Existe un x perteneciente a A tal que
$\exists! x \in A$	Existe uno y sólo un x perteneciente a A tal que

RECTAS Y RECTAS VECTORIALES

Las rectas vectoriales han sido identificadas con las rectas de Π_o que comprenden *o*

He aquí una recta D_o y una recta D paralela a D_o

$\forall \vec{d} \in D :$ $\qquad D = \vec{d} + D_o$



RECTA D PARALELA A LA RECTA VECTORIAL D_o

FIG. 12

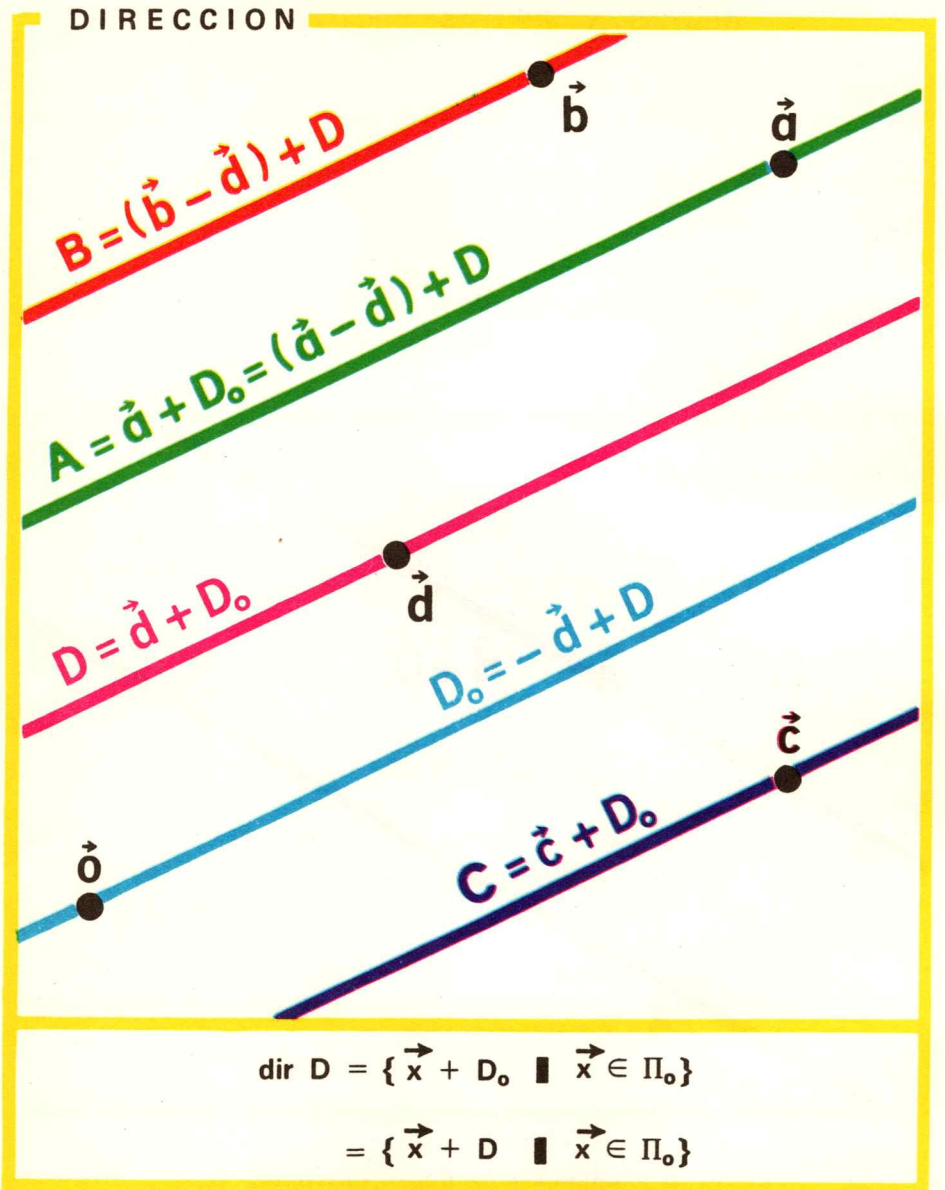


FIG. 13

¡Comenta y justifica!

MM 3 se basa exclusivamente

en

La estructura vectorial plana $\mathbf{R}$, Π_o , $+$

que se puso en evidencia en **MM 2**

El axioma de la perpendicularidad *enunciado en* **MM 1**

Dos nuevos axiomas:

El axioma de la **bisectriz** y el axioma de la **rotación**

enunciados en **MM 3**

Volvamos a formular el

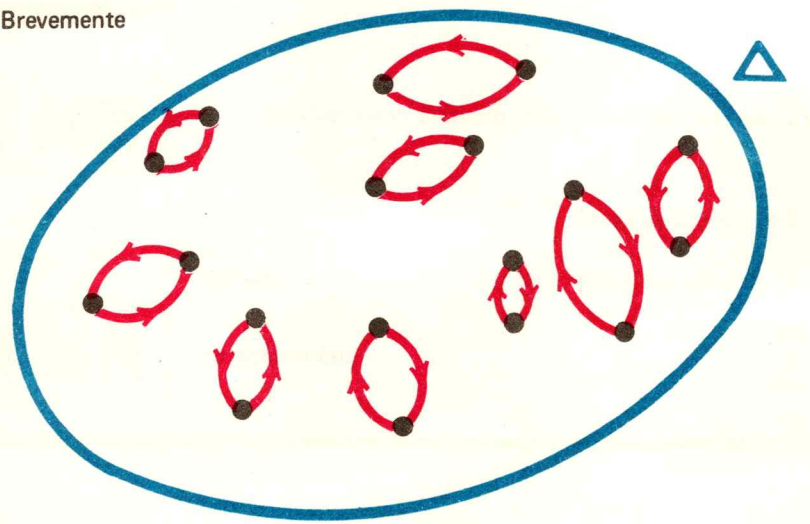
AXIOMA DE LA PERPENDICULARIDAD

La relación $\perp$ definida en

el conjunto $\triangle$ de direcciones de Π

es una permutación simétrica, antirreflexiva.

Brevemente



LA RELACION $\perp$ DEFINIDA EN $\triangle$

Además:

$\forall A,B \in \mathcal{D}: \quad \perp \quad \Leftrightarrow \quad \text{dir } A \perp \text{dir } B$

FIG. 14

1

Simetrías centrales

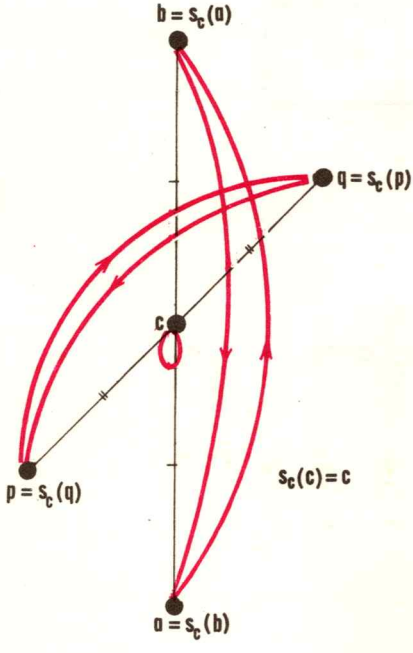
1 — SIMETRIAS CENTRALES

Ya hemos encontrado las **simetrías centrales** en MM1 y vimos en MM2 que son **homotecias de razón — 1**

Recordemos que para todo $c \in \Pi$

$$s_c = \{(x, y) \in \Pi \times \Pi \mid \overrightarrow{xc} = \overrightarrow{cy}\}$$

es la **simetría de centro c**



$\overrightarrow{a.c} = \overrightarrow{c.b}$ $\quad \overrightarrow{p.c} = \overrightarrow{c.q}$

LA SIMETRIA DE CENTRO **c**

FIG. 15

El conjunto de las simetrías centrales se anota $\mathcal{C}$

$$\mathcal{C} = \{ s_c \mid c \in \Pi \}$$

La simetría s_c *es una* **relación simétrica** *de* Π :

$$s_c = s_c^{-1}$$

$$s_c \circ s_c = 1_\Pi$$

La simetría s_c *es una* **permutación** *de* Π

$$\mathcal{C} \subset \mathcal{S}_\Pi$$

El punto c es el único punto fijo de s_c

Luego,

$$\forall\, a, b \in \Pi \quad : \qquad s_a = s_b \iff a = b$$

2 – COMPUESTA DE UNA CUPLA DE SIMETRIAS CENTRALES

– He aquí a , $b \in \Pi$

¿Cuál es la compuesta s_b o s_a ?

Para todo $x \in \Pi$, **escribamos :**

$$s_a\,(x) = y$$

$$s_b\,(y) = z$$

Entonces $z = (s_b \text{ o } s_a)\,(x)$

Calculemos $\overrightarrow{x.z}$

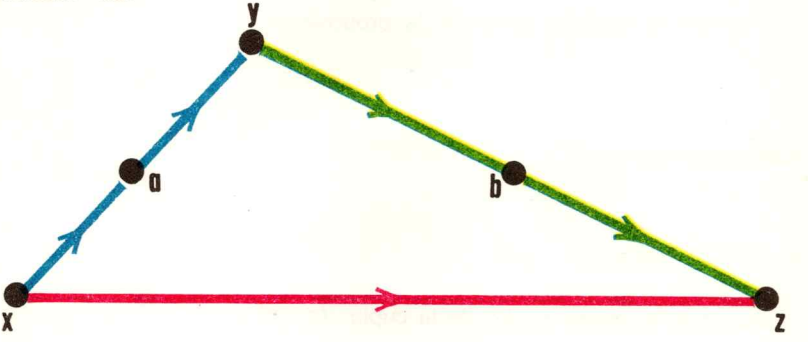


FIG. 16

$$\overrightarrow{x.z} = \overrightarrow{x.a} + \overrightarrow{a.y} + \overrightarrow{y.b} + \overrightarrow{b.z}$$

$$= 2\,(\overrightarrow{a.y} + \overrightarrow{y.b})$$

$$= 2\,\overrightarrow{a.b}$$

Acabamos de probar que para todo $x \in \Pi$: $\overrightarrow{x.z} = 2\,\overrightarrow{a.b}$

Por tanto s_b o $s_a = 2\,\overrightarrow{a.b}$

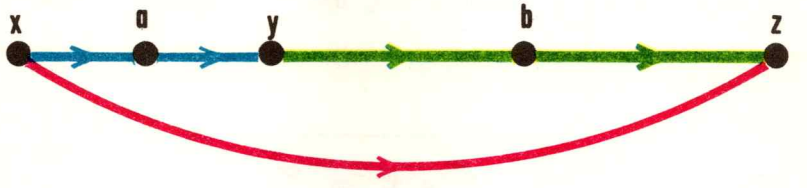


FIG. 17

PROPOSICION

$$\forall\, a\,,\, b \in \Pi \quad : \qquad s_b \circ s_a \;=\; 2\,\overrightarrow{a.b}$$

La compuesta de toda cupla de simetrías centrales es una traslación.

Toda traslación es la compuesta de una cupla de simetrías centrales.

Falta probar la segunda parte de la proposición.

DEMOSTRACION :

He aquí la traslación $\overrightarrow{a.b}$

Llamemos m al punto medio de la cupla $(a\,,\,b)$

$$\overrightarrow{a.b} \;=\; 2\,\overrightarrow{a.m} \;=\; s_m \circ s_a$$

$$=\; 2\,\overrightarrow{m.b} \;=\; s_b \circ s_m$$

l.q.q.d.

Consecuencia inmediata importante

$$\forall\, a\,,b\,,c\,,d \in \Pi \quad : \quad s_a \circ s_b = s_c \circ s_d \iff \overrightarrow{a.b} = \overrightarrow{c.d}$$

$$\mathcal{C} \circ \mathcal{C} = \mathcal{T}$$

3 – CONVENCION DE LOS PUNTOS NUMERADOS

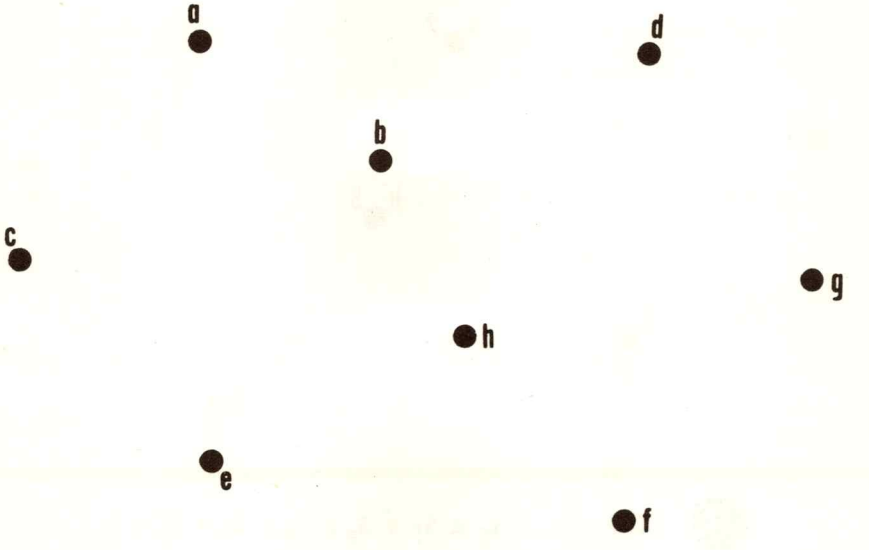


FIG. 18

La sucesión de puntos de Π $a\ ,\ b\ ,\ c\ ,\ d\ ,\ e\ ,\ f\ ,\ g\ ,\ h$

define la sucesión de simetrías centrales $s_a\ ,\ s_b\ ,\ s_c\ ,\ s_d\ ,\ s_e\ ,\ s_f\ ,\ s_g\ ,\ s_h$

y la compuesta $s_h \circ s_g \circ s_f \circ s_e \circ s_d \circ s_e \circ s_b \circ s_a$

La compuesta $s_h \circ s_g \circ s_f \circ s_e \circ s_d \circ s_c \circ s_b \circ s_a$

estará indicada al numerar los puntos $a\ ,\ b\ ,\ c\ ,\ d\ ,\ e\ ,\ f\ ,\ g\ ,\ h$

Convención de los puntos numerados

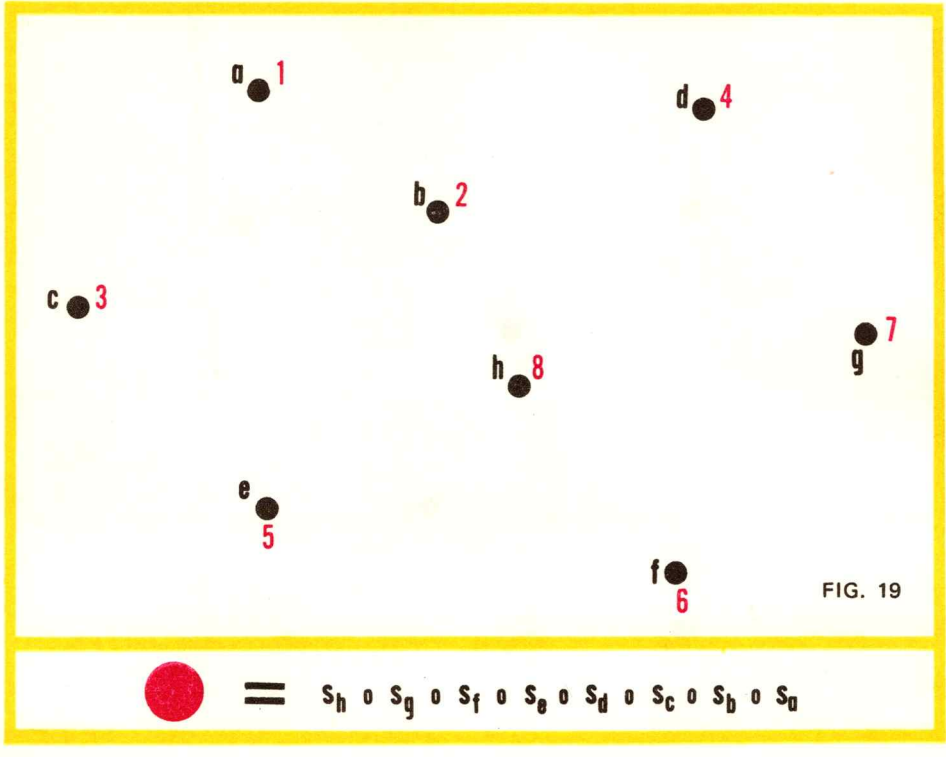


FIG. 19

EJEMPLOS

1.

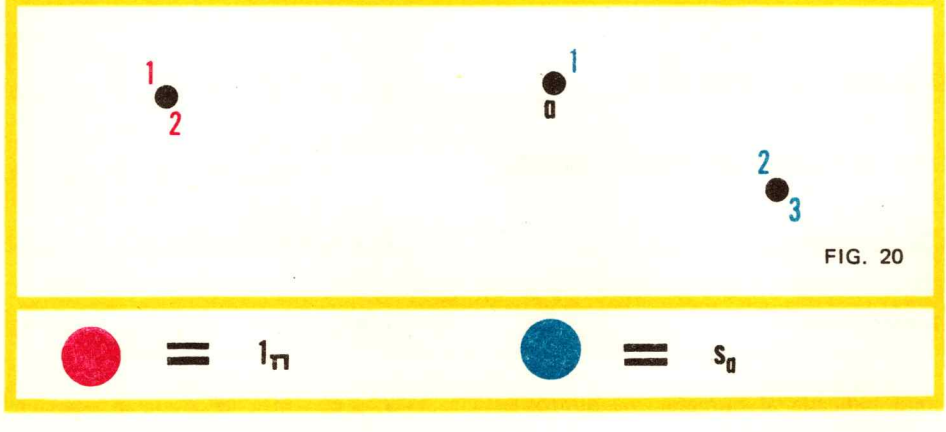


FIG. 20

2.

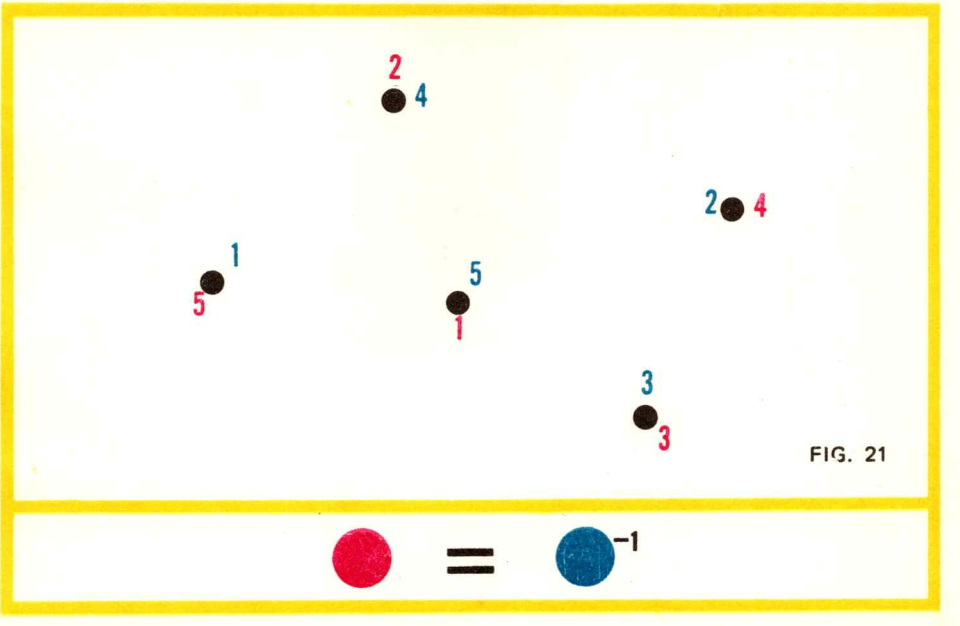


FIG. 21

3.

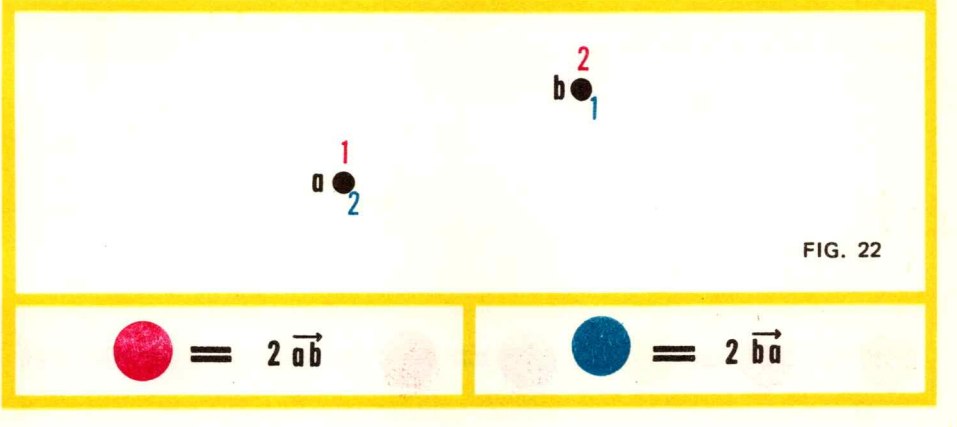


FIG. 22

Esta convención nos permite volver a formular la proposición del § 2

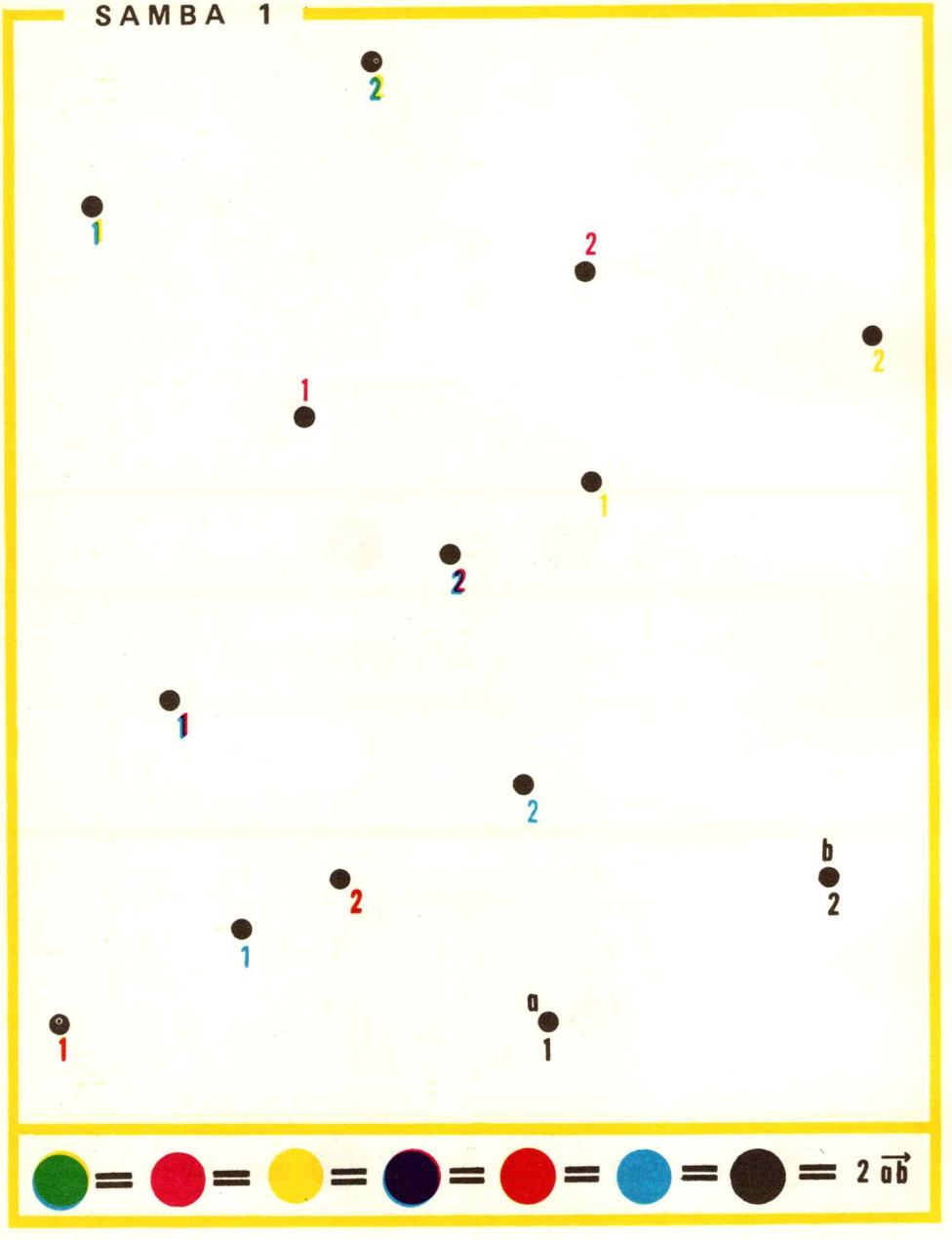


FIG. 23

4 – COMPUESTA DE UNA TERNA DE SIMETRIAS CENTRALES

He aquí los puntos a , b , $c \in \Pi$ ¿Cuál es la compuesta s_c o s_b o s_a ?

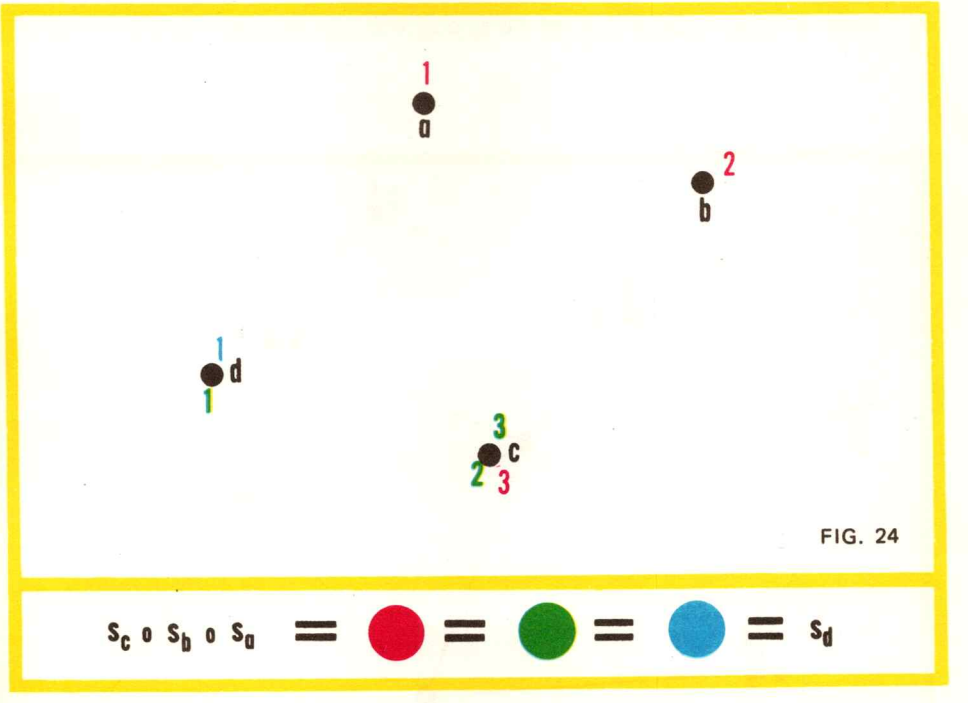


FIG. 24

PROPOSICION

La compuesta de toda terna de simetrías centrales es una simetría central.

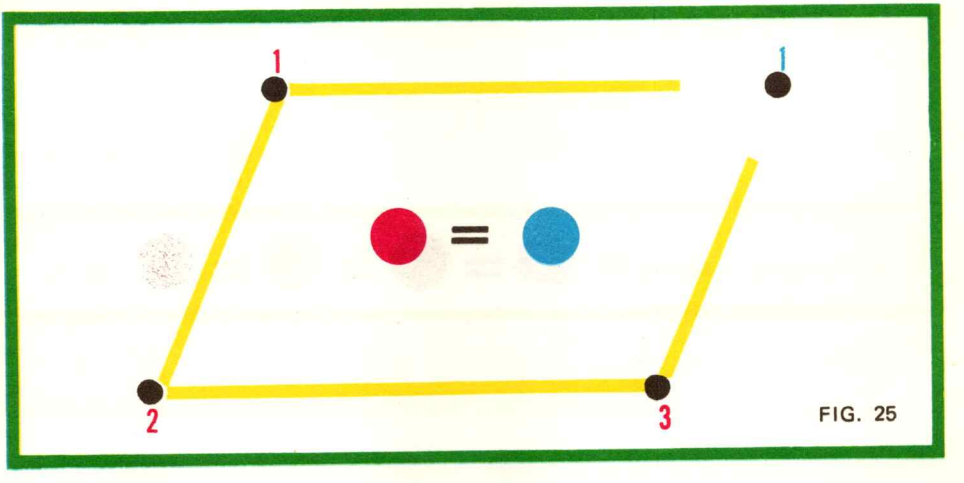


FIG. 25

5 — COMPUESTAS DE SIMETRIAS CENTRALES

He aquí los puntos $a, , b , c , d , e , f, , g \in \Pi$

¿Cuál es la compuesta $s_g \circ s_f \circ s_e \circ s_d \circ s_c \circ s_b \circ s_a$?

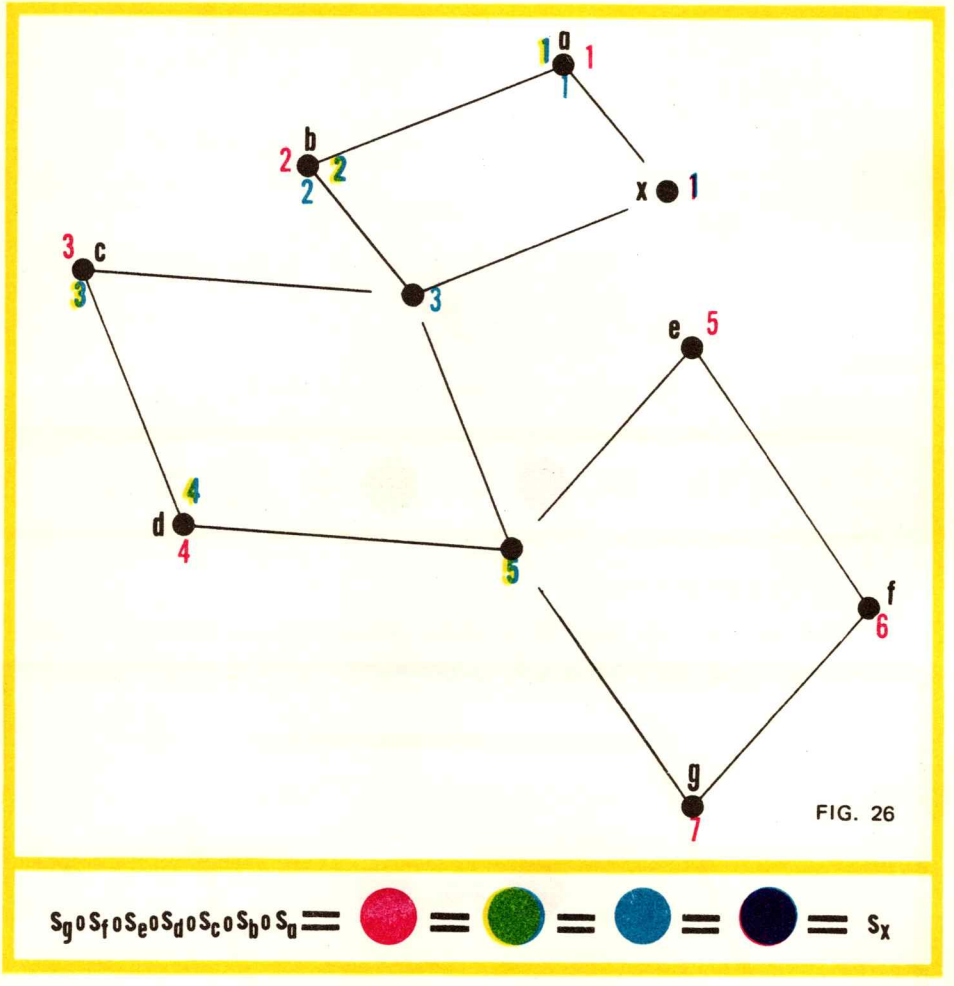


FIG. 26

CONCLUSIONES

1. *La compuesta de toda sucesión de un número impar de simetrías centrales es una simetría central.*

2. *La compuesta de toda sucesión de un número par de simetrías centrales es una traslación.*

3. *La compuesta de toda cupla de traslaciones es una traslación.*

   (¡Lo sabíamos ya! Se vuelve a encontrar aquí este resultado observando que toda traslación es la compuesta de una cupla de simetrías centrales).

4. *La compuesta de una simetría central y de una traslación, es una simetría central.*

5. *La compuesta de una traslación y de una simetría central es una simetría central.*

6 – EL GRUPO DE SIMETRIAS CENTRALES Y DE TRASLACIONES

TEOREMA

El conjunto $\mathcal{C} \cup \mathcal{T}$ de simetrías centrales y de traslaciones es un grupo con respecto a la composición.

a) **El conjunto de traslaciones es un subgrupo conmutativo de** $\mathcal{C} \cup \mathcal{T}$, o

b) **La compuesta de toda cupla de simetrías centrales es una traslación**

c) **La compuesta de una simetría central y de una traslación, o de una traslación y una simetría central es una simetría central.**

d) $\{\mathcal{C}, \mathcal{T}\}$ **es una partición de** $\mathcal{C} \cup \mathcal{T}$

e) $\mathcal{C} \cup \mathcal{T}$ **es el menor subgrupo de** $\mathcal{J}\Pi$, o **que contiene** $\mathcal{C}$

Recordemos que

El conjunto A *es menor que el conjunto* B	*significa*	A ⊂ B

Así A ∪ C *es el menor conjunto que contiene a la vez a* A *y a* C

y A ∩ C *es el mayor conjunto contenido a la vez en* A *y en* C

DEMOSTRACION :

Vimos en (1 . 5) que $\mathcal{C} \cup \mathcal{T}$ es estable para la composición.

$1_\Pi \in \mathcal{C} \cup \mathcal{T}$ (puesto que 1_Π es una traslación).

Toda simetría central es igual a su recíproca.

La recíproca de toda traslación es una traslación.

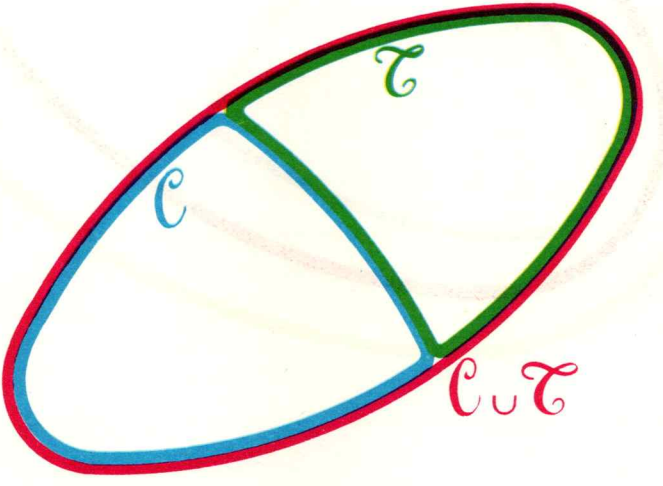
Resulta de ello que $\mathcal{C} \cup \mathcal{T}$ *es un grupo* (subgrupo de $\mathcal{J}\Pi$, o).

Sabemos desde hace tiempo que el conjunto de traslaciones es un grupo conmutativo con respecto a la composición, y por tanto un subgrupo conmutativo de $\mathcal{C} \cup \mathcal{T}$, o (lo que demuestra *a*).

En el párrafo anterior probamos ya los puntos *b* y *c*.

d) *Falta solamente probar que* $\mathcal{C} \cap \mathcal{T} = \phi$

El conjunto de puntos fijos de una simetría central es un conjunto unitario.
El conjunto de puntos fijos de una traslación es Π o ϕ
Ninguna simetría central es por tanto una traslación.
De donde $\mathcal{C} \cap \mathcal{T} = \phi$



$\{\mathcal{C}, \mathcal{T}\}$ ES UNA PARTICION DE $\mathcal{C} \cup \mathcal{T}$

FIG. 27

e) He aquí un subgrupo S de $\mathcal{S}\Pi$ que contiene $\mathcal{C}$

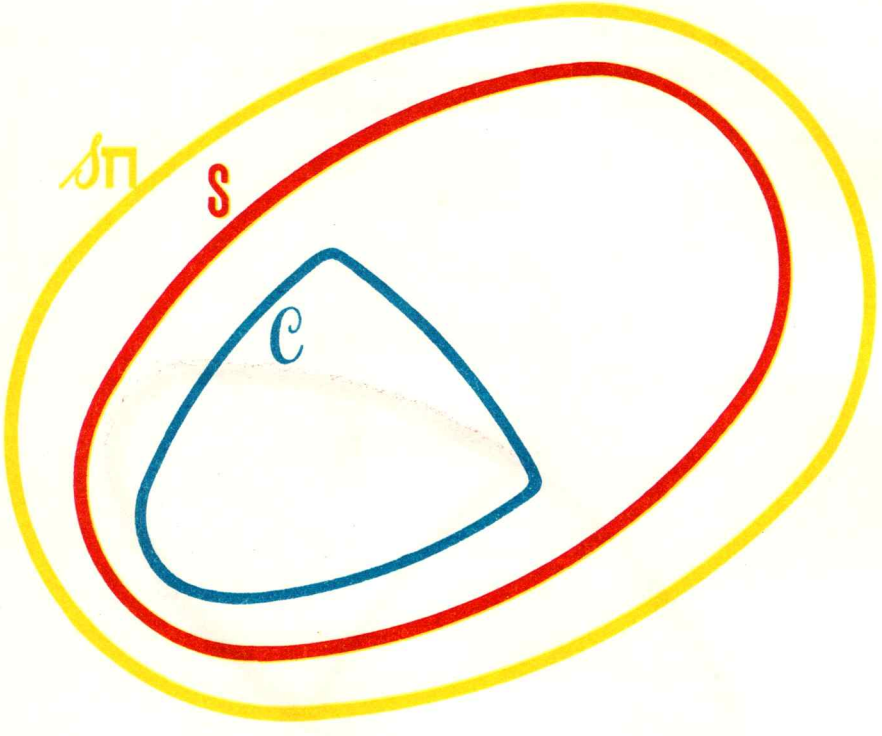


FIG. 28

El grupo S comprende la compuesta de toda cupla de simetrías centrales.
Luego S contiene al conjunto $\mathcal{T}$ de traslaciones,
y por tanto, S contiene a $\mathcal{C} \cup \mathcal{T}$

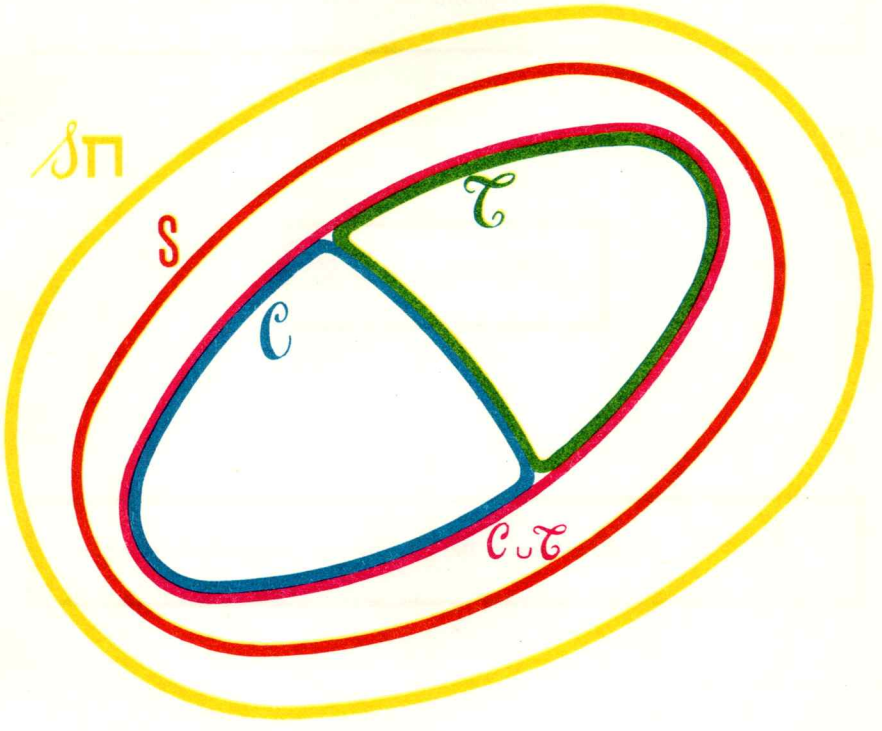


FIG. 29

$\mathfrak{C} \cup \mathfrak{T}$ es un subgrupo de $\mathfrak{H}\Pi$, o que contiene a $\mathfrak{C}$
y está contenido en **todo** subgrupo S de $\mathfrak{H}\Pi$ que contiene a $\mathfrak{C}$

$\mathfrak{C} \cup \mathfrak{T}$ es por tanto

el menor subgrupo de $\mathfrak{H}\Pi$ *que contiene a* $\mathfrak{C}$

l.q.q.d.

En lugar de decir

$\mathcal{C} \cup \mathcal{T}$ *es el menor subgrupo de* $\mathcal{S}\Pi$ *que contiene a* $\mathcal{C}$

decimos

$\mathcal{C}$ **engendra a** $\mathcal{C} \cup \mathcal{T}$

ó

$\mathcal{C} \cup \mathcal{T}$ *es el subgrupo* **de** $\mathcal{S}\Pi$, o **engendrado** *por* $\mathcal{C}$

lo que se anota

$$\mathcal{C} \cup \mathcal{T} = grp\ \mathcal{C}$$

7 – EJERCICIOS

1.

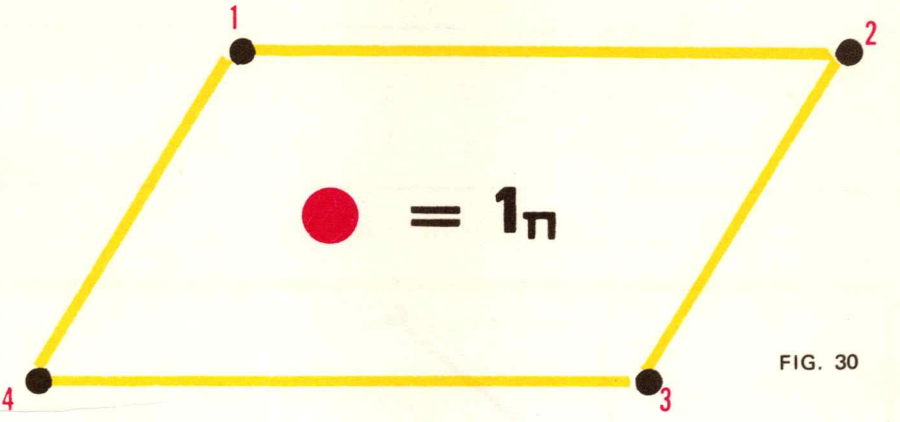


FIG. 30

2.

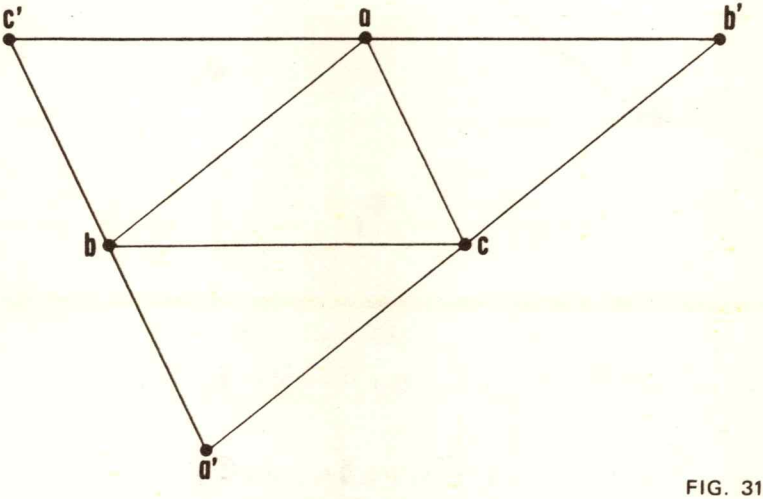


FIG. 31

$s_a \circ s_b \circ s_c =$ $\qquad$ $s_c \circ s_b \circ s_a =$

$s_b \circ s_c \circ s_a =$ $\qquad$ $s_a \circ s_c \circ s_b =$

$s_c \circ s_a \circ s_b =$ $\qquad$ $s_b \circ s_a \circ s_c =$

$$\forall\, x, y, z \in \Pi \;:\; s_x \circ s_y \circ s_z = s_z \circ s_y \circ s_x$$

3. Ennumera de 1 a 13 ciertos puntos de Π.
Construye el centro de la simetría así definida.

4.

$\forall t \in \mathfrak{T} ; \forall p \in \Pi :$

$\exists!\ x \in \Pi \quad : \quad t = s_x \circ s_p$

$\exists!\ y \in \Pi \quad : \quad t = s_p \circ s_y$

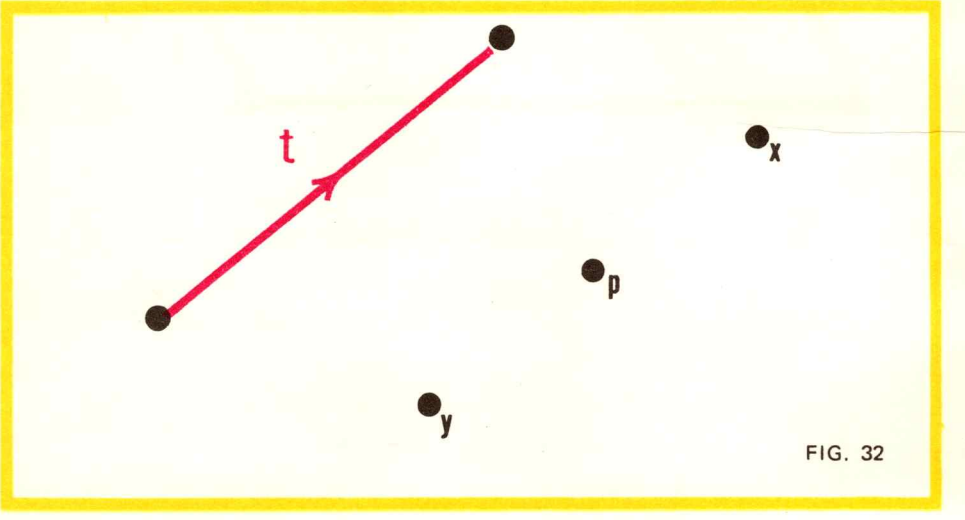


FIG. 32

5. $grp\ \mathcal{C} = \{ s_n \circ s_{n-1} \circ \ldots \circ s_1 \mid n \in \omega_0 ; s_1, \ldots, s_n \in \mathcal{C} \}$

6. $grp\ \mathcal{C} = \{ s_1 , s_2 \circ s_1 \mid s_1 , s_2 \in \mathcal{C} \}$

7. **Si** m es el punto medio de la cupla de puntos a, b de Π

Entonces s_m es la única simetría central que aplica a sobre b

8. **Si** $a , b , c \in D \in \mathfrak{D}$

Entonces $s_a \circ s_b \circ s_c$ es una simetría cuyo centro pertenece a D

9. **Si** $a, b, c \in \Pi$ y m es el punto medio de (a, c).

Entonces $s_a \circ s_b \circ s_c = s_x$ con $x = s_m\ (b)$

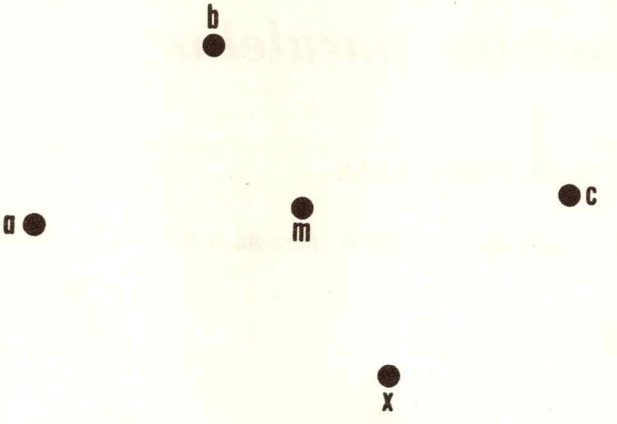


FIG. 33

DEFINICION

Si $\mathcal{A} \subset \mathfrak{s}\Pi$ y $\mathcal{B} \subset \mathfrak{s}\Pi$

Entonces $\mathcal{A} \circ \mathcal{B} = \{ a \circ b \mid a \in \mathcal{A} \text{ y } b \in \mathcal{B} \}$

10. $$\mathcal{C} \circ \mathcal{C} = \mathcal{C}$$

11. La fórmula del ejercicio 10 es **equivalente** a la *Proposición 1 . 2*

12. $$\mathcal{C} \circ \mathcal{C} = \mathcal{C} - \mathcal{C} \circ \mathcal{C}$$

13. $$\mathcal{C} \circ \mathcal{C} = \mathcal{C}$$

14. $\{ \mathcal{C}, \mathcal{C} \}, \circ$ es un grupo cuyo elemento neutro es $\mathcal{C}$

2

Simetrías paralelas

1 — SIMETRIAS PARALELAS

He aquí la simetría **s** de eje A, paralela a B

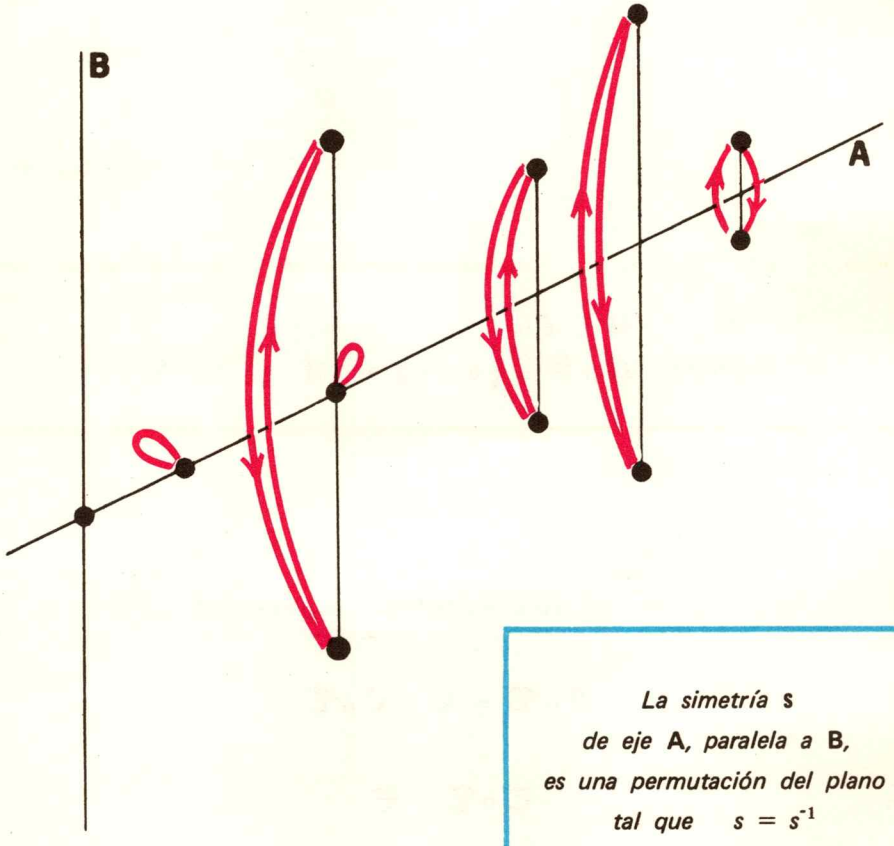
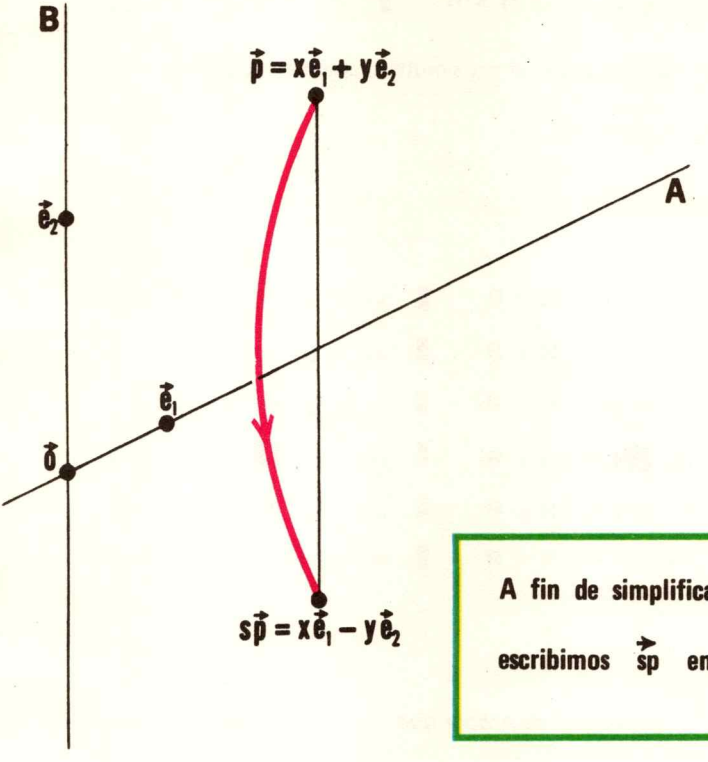


FIG. 34

La simetría **s**
de eje **A**, *paralela a* **B**,
es una permutación del plano
tal que $s = s^{-1}$

Llamemos o al punto de intersección de A y B , lo cual transforma al plano Π en espacio vectorial $\mathbf{R}$, Π_o , $+$ y elijamos convenientemente una base $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ de dicho vectorial.



A fin de simplificar la escritura escribimos $\vec{sp}$ en lugar de $s(\vec{p})$

FIG. 35

El plano Π se identifica con $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, gracias a la elección de la referencia o , e_1 , e_2 , la simetría s se define entonces mediante

$$s \;:\; \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R} \times \mathbf{R} \;:\; (x , y) \to (x , -y)$$

2 – RECTAS

He aquí una recta $D \in \mathfrak{D}$

Sabemos $\left(\boxed{\text{MM2}}, 16\right)$ que la recta D está definida por

$$D = \{ (x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid ax + by + c = 0 \}$$

con $a, b, c \in \mathbf{R}$ (siendo los a, b no simultáneamente nulos).

Luego

$$\begin{aligned} sD &= \{ (x, -y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid ax + by + c = 0 \} \\ &= \{ (x, -y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid ax - b(-y) + c = 0 \} \\ &= \{ (x, -y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid ax - b(-y) + c = 0 \} \\ &= \{ (x, \blacksquare) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid ax - b \cdot \blacksquare + c = 0 \} \\ &= \{ (x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid ax - b \cdot y + c = 0 \} \\ &= \{ (x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid ax - by + c = 0 \} \end{aligned}$$

Acabamos de probar que

$$\forall D \in \mathfrak{D} \quad : \quad sD \in \mathfrak{D}$$

He aquí la recta D' paralela a D

$$D' \equiv ax + by + c' = 0$$

ello implica $sD' \equiv ax - by + c' = 0$

Pero $sD \equiv ax - by + c = 0$

} Luego $sD \parallel sD'$

Destaquemos el resultado obtenido :

Toda simetría paralela es una permutación del plano
que aplica cada recta sobre una recta respetando el paralelismo.

Esto nos recuerda un resultado de **MM2**

Toda homotecia no constante es una permutación del plano
que aplica cada recta sobre una recta (paralela)
respetando paralelismo y abcisa.

MM2 . 9

En particular, *toda simetría central aplica cada recta sobre una recta respetando paralelismo y abcisa.*

PROPOSICION — *Toda simetría paralela es una permutación de* Π
que aplica cada recta sobre una recta
respetando paralelismo, equipolencia y abcisa.

Ya sabemos que toda simetría paralela *s* es una permutación de Π que aplica cada recta sobre una recta respetando el paralelismo.

Como la equipolencia se define a partir del paralelismo,
resulta que toda simetría paralela respeta la equipolencia.

Falta probar que
s aplica toda recta D *sobre s*D

respetando las abcisas.

DEMOSTRACION :

Primer caso — *La recta* D *no es paralela a* B

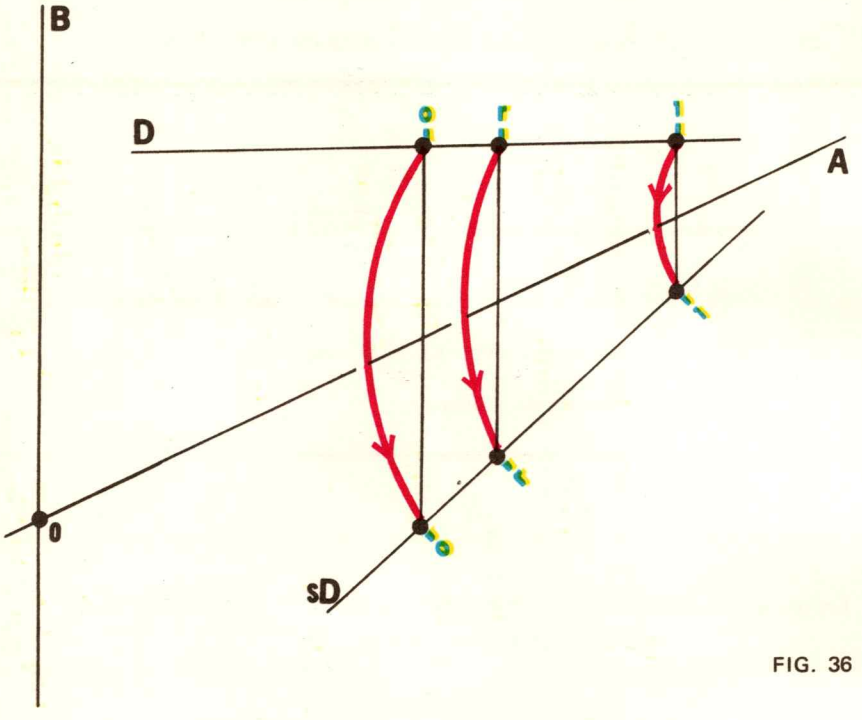


FIG. 36

La proposición resulta entonces del *Teorema de* **Thales.**

Segundo caso — *La recta* D *es paralela a* B

Llamemos $\{a\} = A \cap D$

La aplicación $D \rightarrow \Pi \quad : \quad x \rightarrow s\,x$

es igual a

La aplicación $D \rightarrow \Pi \quad : \quad x \rightarrow s_a\,x$

Pero, la simetría central s_a aplica D sobre D respetando las abcisas.

Por tanto la simetría paralela s aplica D sobre D respetando las abcisas.

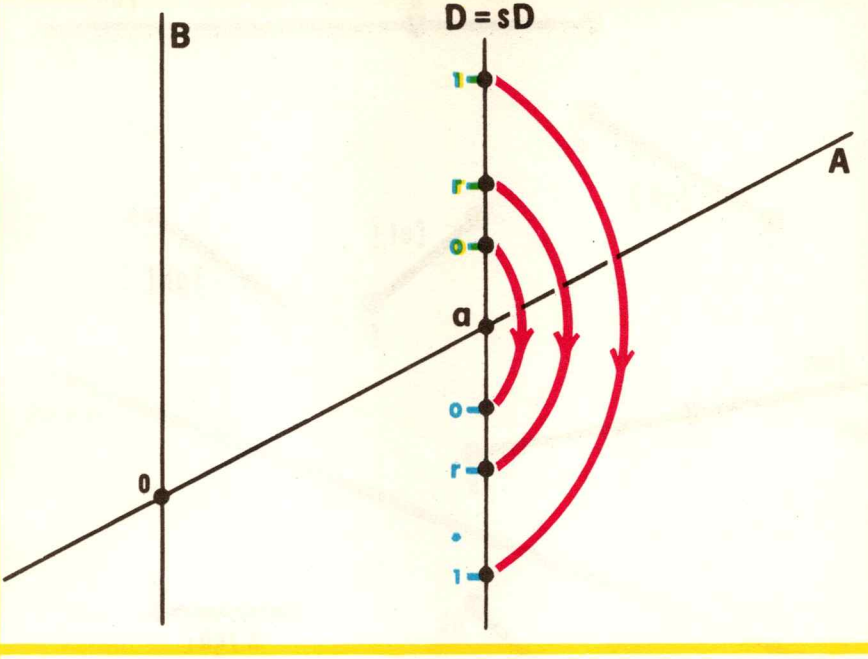


IMAGEN DE LA RECTA D ∥ B
POR LA SIMETRIA S DE EJE A Y PARALELA A B

FIG. 37

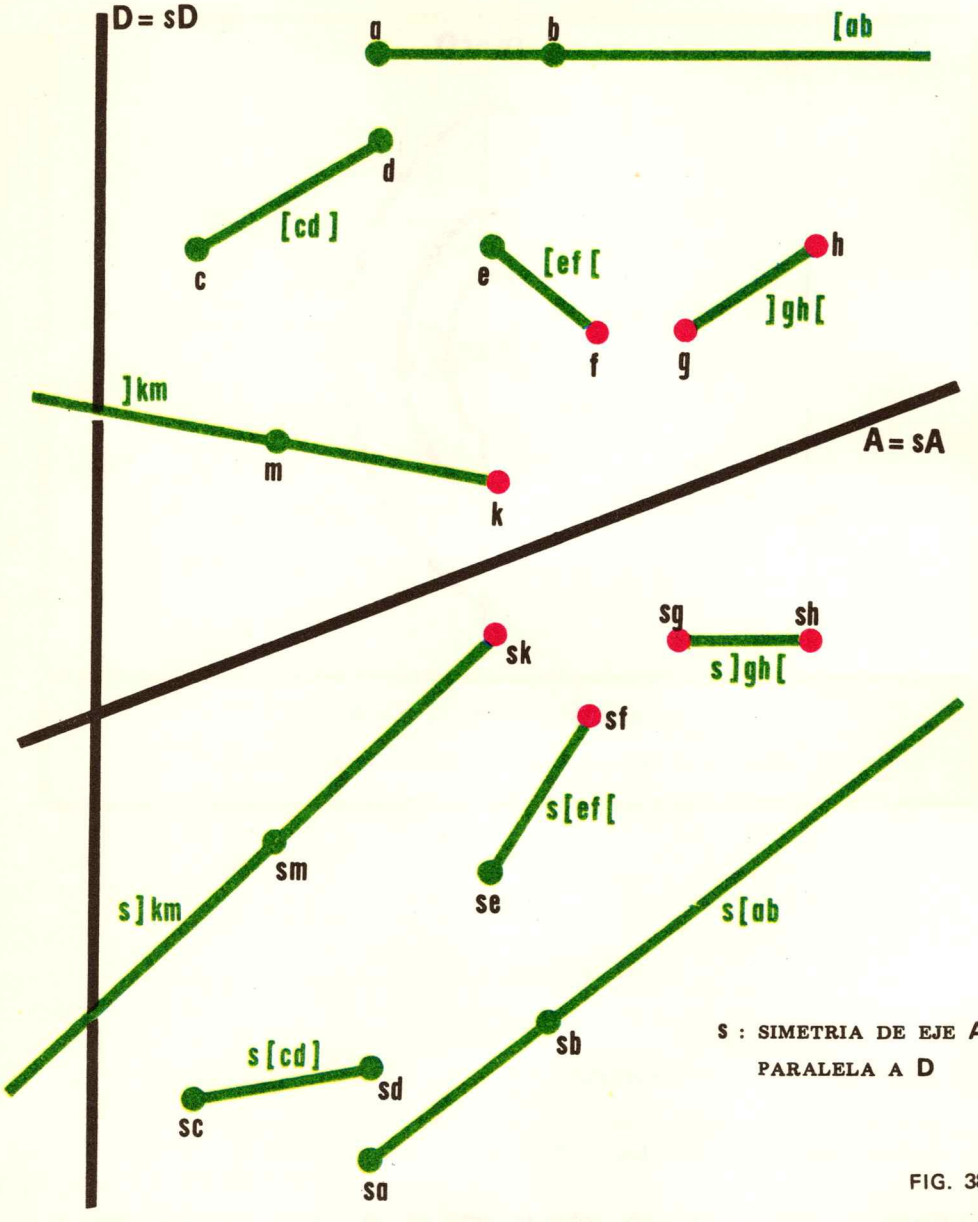
3 – SEMIRRECTAS Y SEGMENTOS

He aquí dos puntos distintos $a \neq b$ y la simetría paralela s

Como s aplica la recta ab sobre la recta $sa \,.\, ab$ respetando las abcisas, resulta de inmediato :

$s\,[ab] = [sa \,.\, sb] \quad ; \quad s\,[ab[= [sa \,.\, sb[\quad ; \quad s\,]ab[=]sa \,.\, sb[$

$s\,[ab = [sa \,.\, sb \quad ; \quad s\,]ab =]ab \,.\, sb$



S : SIMETRIA DE EJE A PARALELA A D

FIG. 38

Toda simetría paralela aplica toda semirrecta sobre una semirrecta y todo segmento sobre un segmento.

4 – SEMIPLANOS

He aquí una simetría paralela s

Como en 2.1, fijemos de una vez por todas una referencia de Π tal que s esté definida por $\quad s : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2 \quad : \quad (x, y) \to (x, -y)$

Si D es la recta definida por

$$D = \{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid ax + by + c = 0 \}$$

Entonces los semiplanos *abiertos* de borde D están definidos por

$$\Pi_1 = \{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid ax + by + c > 0 \}$$
$$\Pi_2 = \{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid ax + by + c < 0 \}$$

y los semiplanos cerrados de borde D están definidos por

$$\overline{\Pi}_1 = \{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid ax + by + c \geqslant 0 \}$$
$$\overline{\Pi}_2 = \{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid ax + by + c \leqslant 0 \}$$

(MM2 . 17)

Entonces

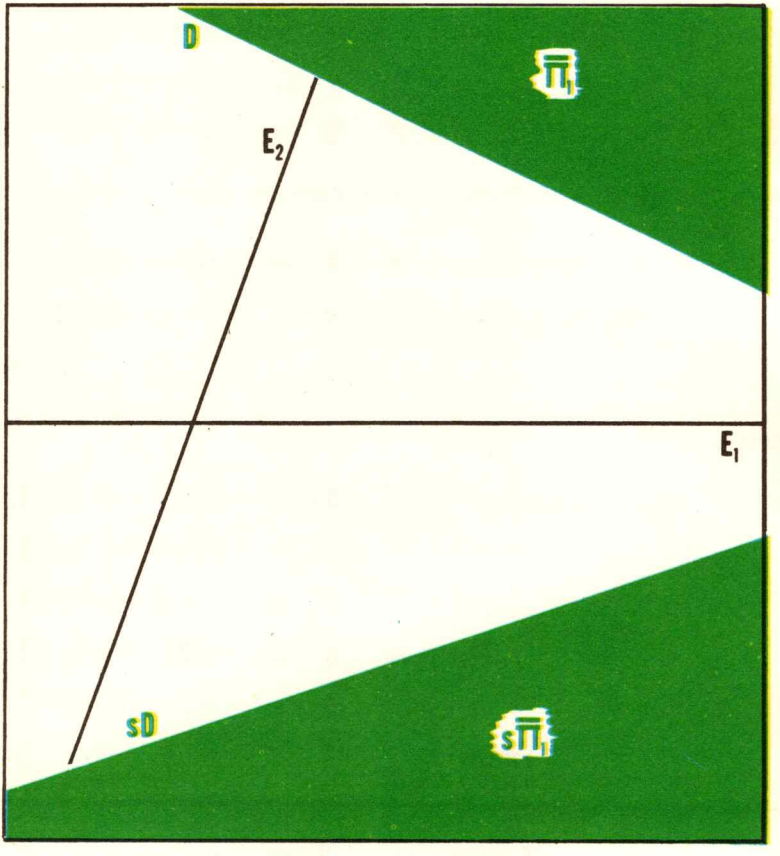
$$\begin{aligned} s\Pi_1 &= \{ (x, -y) \in \mathbf{R}^2 \mid ax + by + c > 0 \} \\ &= \{ (x, -y) \in \mathbf{R}^2 \mid ax - b(-y) + c > 0 \} \\ &= \{ (x, \boxed{-y}) \in \mathbf{R}^2 \mid ax - b\boxed{-y} + c > 0 \} \\ &= \{ (x, \blacksquare) \in \mathbf{R}^2 \mid ax - b\blacksquare + c > 0 \} \\ &= \{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid ax - by + c > 0 \} \\ &= \{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid ax - by + c > 0 \} \end{aligned}$$

$$s\Pi_1 = \{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid ax - by + c > 0 \}$$
$$s\Pi_2 = \{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid ax - by + c < 0 \}$$
$$s\overline{\Pi}_1 = \{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid ax - by + c \geqslant 0 \}$$
$$s\overline{\Pi}_2 = \{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid ax - by + c \leqslant 0 \}$$

PROPOSICION

La imagen por s de todo semiplano abierto de borde D *es un semiplano abierto de borde s*D

La imagen por s de todo semiplano cerrado de borde D *es un semiplano cerrado de borde s*D



SEMIPLANO CERRADO Y SU IMAGEN POR LA SIMETRIA PARALELA S

FIG. 39

5 – COMPUESTAS DE SIMETRIAS PARALELAS

Los resultados obtenidos en los párrafos 2, 3 y 4 siguen siendo válidos para las compuestas de simetrías paralelas.

En resumen :

TEOREMA

La compuesta t de toda sucesión finita de simetrías paralelas

respeta

rectas , semirrectas , segmentos , semiplanos

paralelismo , equipolencia , abcisas.

6 – SEMIRRECTAS EQUIPOLENTES

Toda traslación es la compuesta de simetrías centrales y aplica, por tanto, toda semirrecta cerrada sobre una semirrecta cerrada.

Dos semirrectas cerradas se denominan equipolentes

ssi

una es la imagen de la otra por una traslación

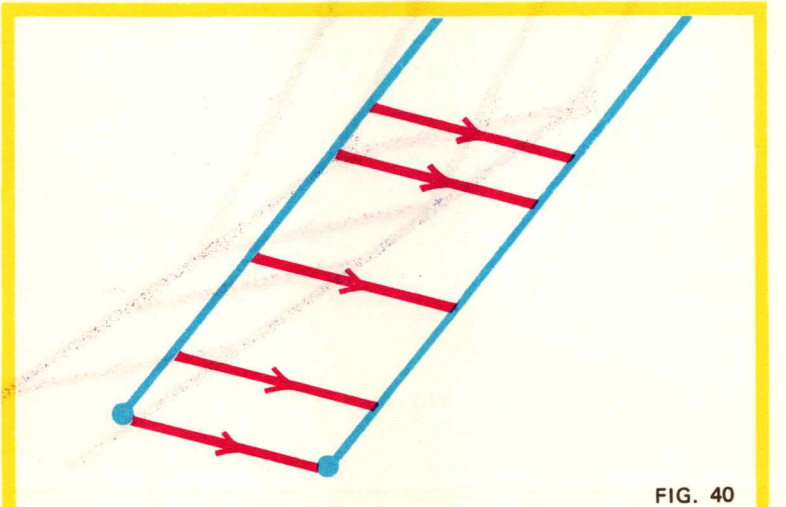


FIG. 40

SEMIRRECTAS CERRADAS

EQUIPOLENTES

La simetría paralela *s* respeta la equipolencia

Por ello

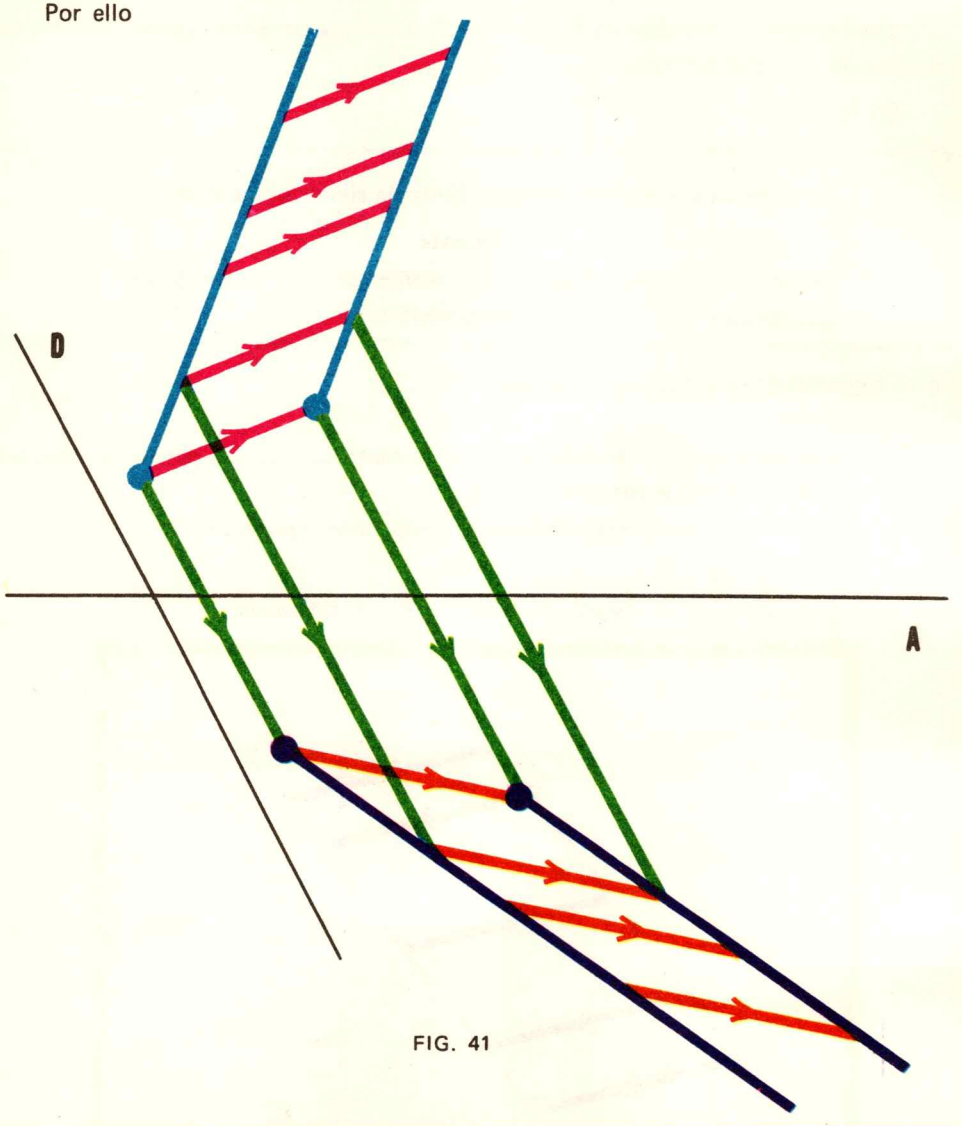


FIG. 41

Toda simetría paralela aplica
toda cupla de semirrectas cerradas equipolentes
sobre una cupla de semirrectas cerradas equipolentes.

7 – EJERCICIOS

1. Toda simetría paralela s es igual a su recíproca

$$s = s^{-1}$$

$$s^2 = 1_\Pi$$

2. **Si** la recta D es paralela al eje de la simetría paralela s

Entonces $sD \parallel D$

3. **Si** la simetría s es paralela a la recta D

Entonces $sD = D$

4. Llamemos o al centro de la simetría central s

Llamemos E_1 y E_2 a dos rectas distintas que comprenden o

Anotemos s_1 la simetría de eje E_1 y paralela a E_2

y s_2 la simetría de eje E_2 y paralela a E_1

Luego :

$$s = s_1 \circ s_2 = s_2 \circ s_1$$

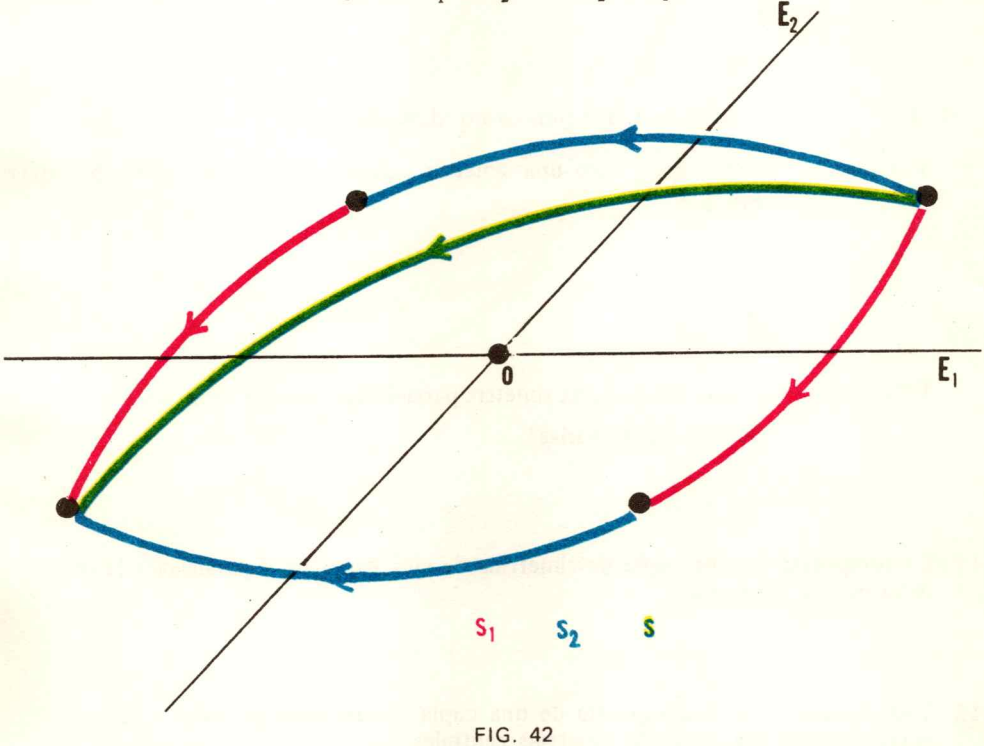


FIG. 42

5. Toda simetría central es la compuesta de una cupla de simetrías paralelas.

6. El eje de toda simetría paralela que aplica *a* sobre *b*

comprende el punto medio de (*a* , *b*)

7. He aquí una cupla (*a* , *b*) de puntos distintos de Π y una recta D no paralela a *ab*

Existe una y sólo una simetría paralela de eje paralelo a D
que aplica *a* sobre *b*

8. **Si** las rectas A , B , S son tales que $A \parallel S \parallel B$

Entonces existe una y sólo una simetría paralela a S que aplica A sobre B

9. **Si** o , *a* , *b* son tres puntos no alineados de Π

Entonces existe una y sólo una simetría paralela que aplica *a* sobre *b* y deja fijo a o.

10. **Si** $\vec{ab} = \vec{cd}$

Entonces ¿existe siempre una simetría paralela que aplica *a* sobre *b* y *c* sobre *d*?
¿Pueden existir varias?

11. La compuesta de una cupla de simetrías de ejes paralelos y paralelas a la misma recta es una traslación.

12. Toda traslación es la compuesta de una cupla de simetrías paralelas y la compuesta de una cupla de simetrías centrales.

13. He aquí simetrías paralelas que tienen el mismo eje A :

s_1 = simetría de eje A paralela a B

s_2 = simetría de eje A paralela a C

Dibuja una flecha de $s_2 \circ s_1$

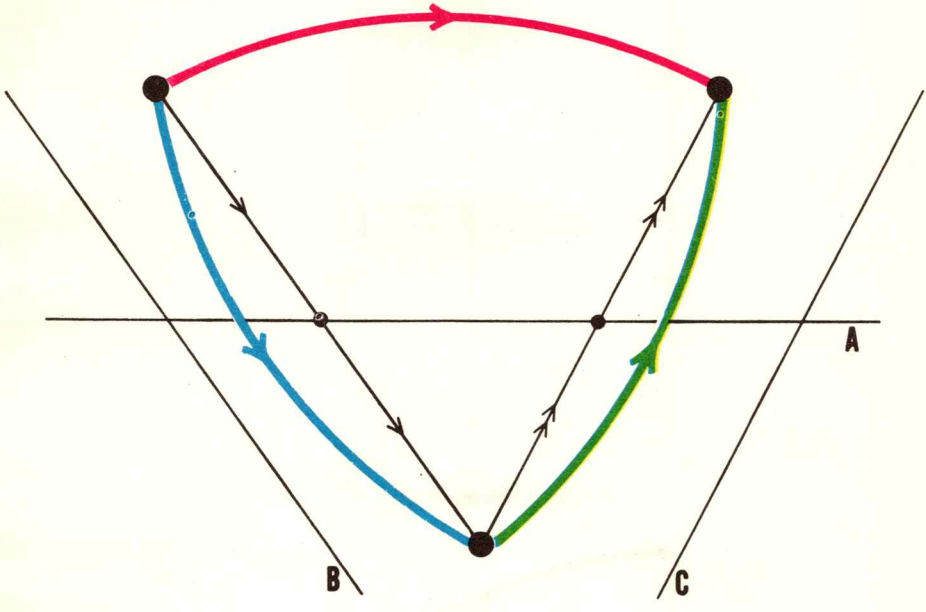
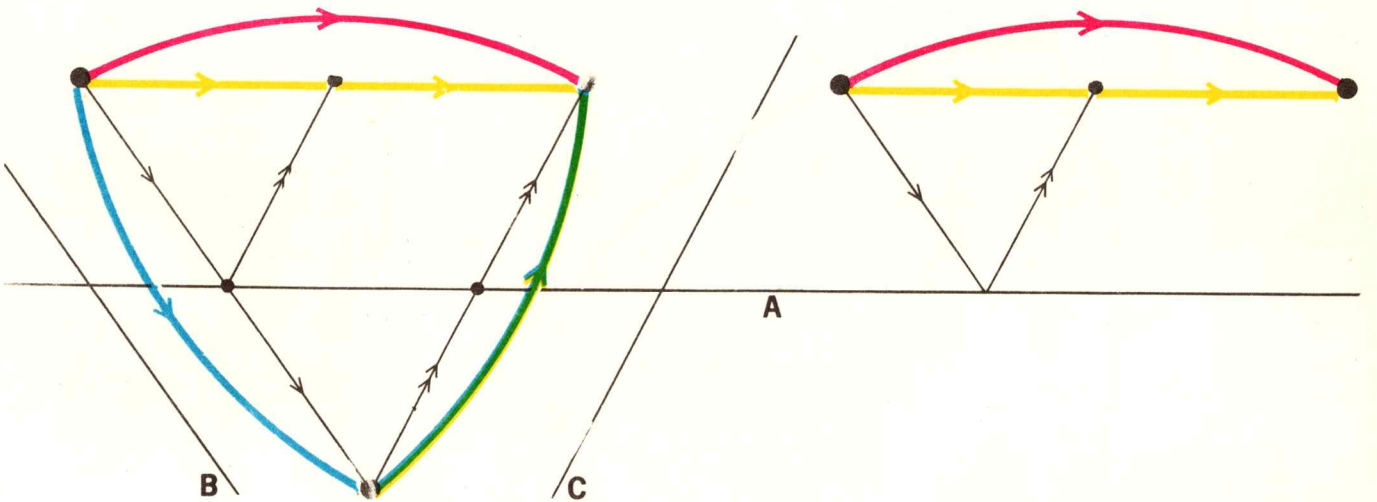


FIG. 43

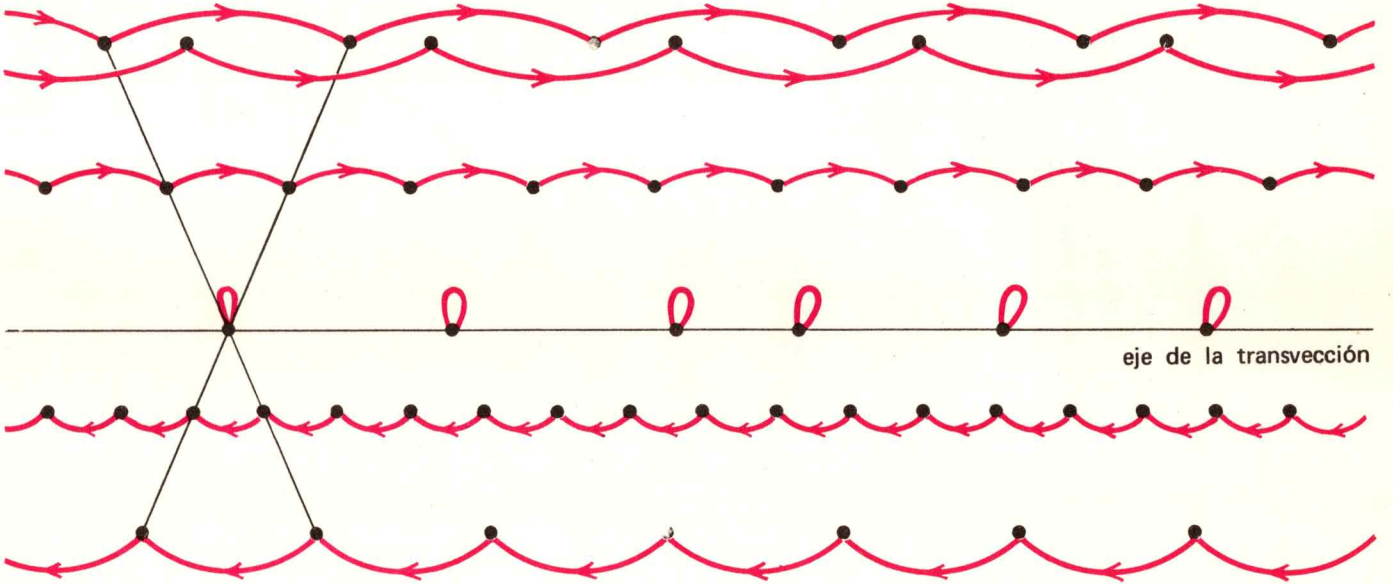
Las compuestas de dos simetrías paralelas de mismo eje se llaman

TRANSVECCIONES



S_1 S_2 $S_2 \circ S_1$

FIG. 44



TRANSVECCION

FIG. 45

14. La transformación idéntica es una transvección.

15. **Si** d es una transvección de eje A $\parallel$ B

Entonces dB = B

Las cuplas de d cuyos orígenes pertenecen a B son equipolentes.

16. La proposición del párrafo 6 no sólo es válida para las simetrías paralelas, sino también para las compuestas de simetrías paralelas.

3

Simetrías ortogonales

1 – SIMETRIAS ORTOGONALES

DEFINICION:– *La simetría de eje* X *y paralela a* Y *es* **ortogonal**

ssi

$X \perp Y$

Se anota por $\mathcal{S}$ *el conjunto de simetrías ortogonales*

Para abreviar, diremos **simetría** en lugar de **simetría ortogonal**

SIMETRIA	=	**SIMETRIA ORTOGONAL**

La **simetría** de eje A
se halla totalmente determinada por A
y se anotará s_A

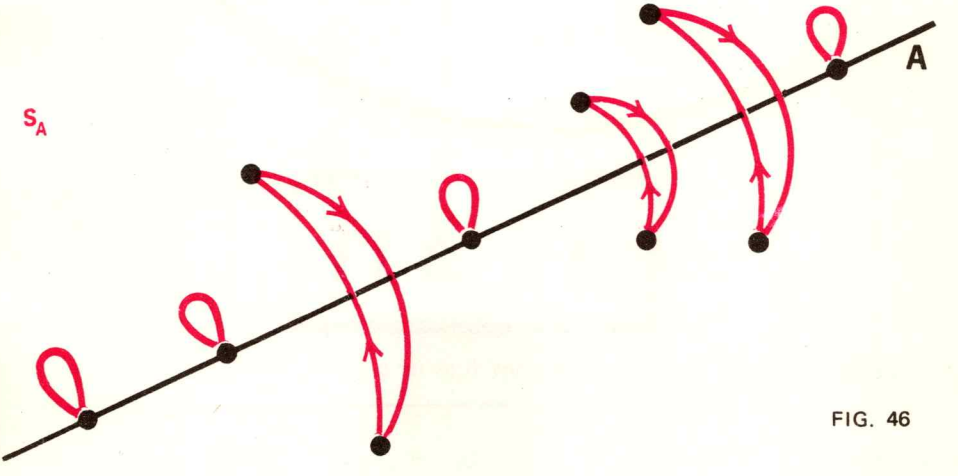
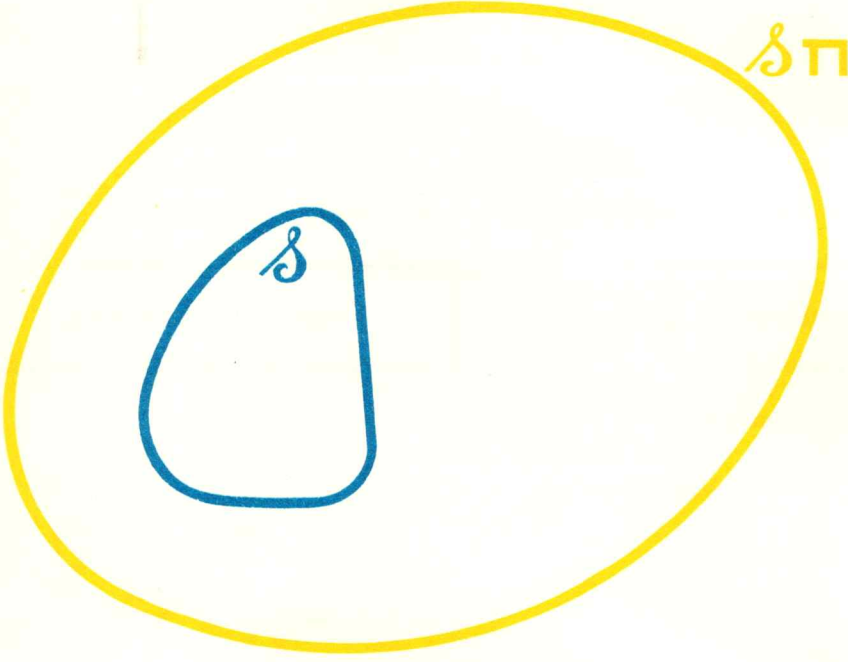


FIG. 46

$$\mathcal{S} = \{ s_D \mid D \in \mathcal{D} \}$$

Toda simetría (ortogonal) es una simetría paralela

y, por lo tanto, una permutación de Π (que además es igual a su recíproca).



$$\mathcal{S} \subset \mathcal{S}\Pi$$

FIG. 47

La recta A es el conjunto de puntos fijos de s_A

Por ello $\forall A, B \in \mathcal{D} : s_A = s_B \iff A = B$

2 – EJE DE SIMETRIA

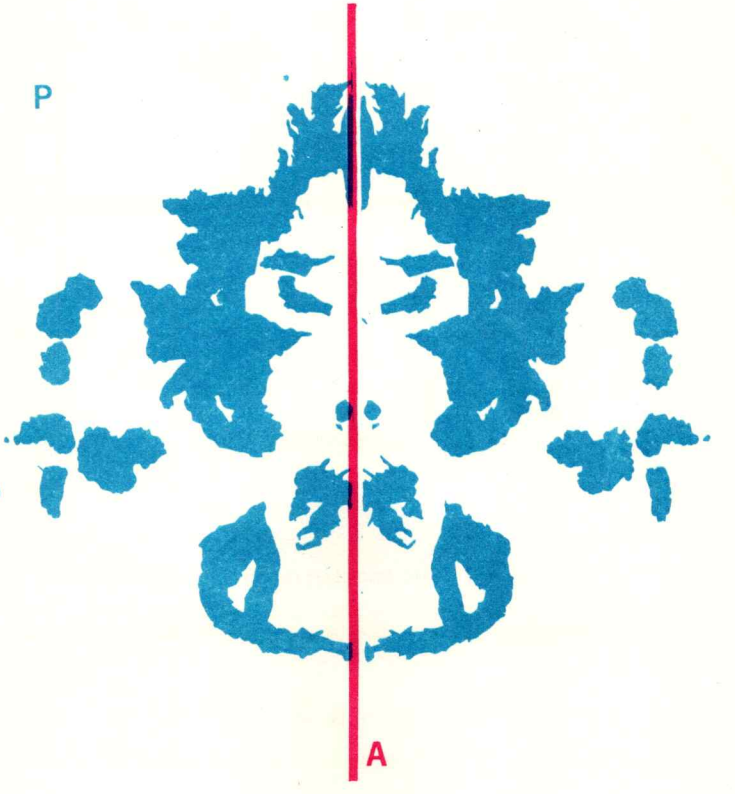
DEFINICION – *La recta* A *es un* **eje** *(de simetría) de la parte* P *de* Π

ssi

$$s_A\, P = P$$

EJEMPLOS

1.



LA PARTE **P** DE Π Y SU EJE **A**

FIG. 48

2. Toda recta es un eje de Π

3. Toda recta es un eje de ϕ

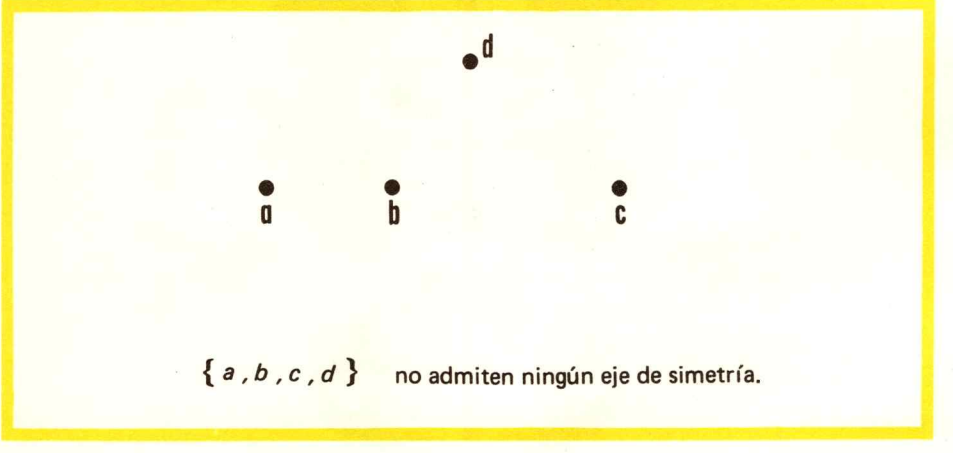
4. $\mathfrak{D}_a$ es el conjunto de ejes de $\{a\}$

5. La recta X es eje de simetría de la recta D

ssi

$X = D$ ó $X \perp D$

6.



$\{a, b, c, d\}$ no admiten ningún eje de simetría.

FIG. 49

3 — MEDIATRIZ DE UN PAR DE PUNTOS

PROPOSICION

Si *los puntos a y b son distintos,*

Entonces *existe una y solo una simetría que aplica a sobre b*

DEMOSTRACION :

Llamemos M a la perpendicular a *ab*
que comprende al punto medio *m* de $\{ a, b \}$

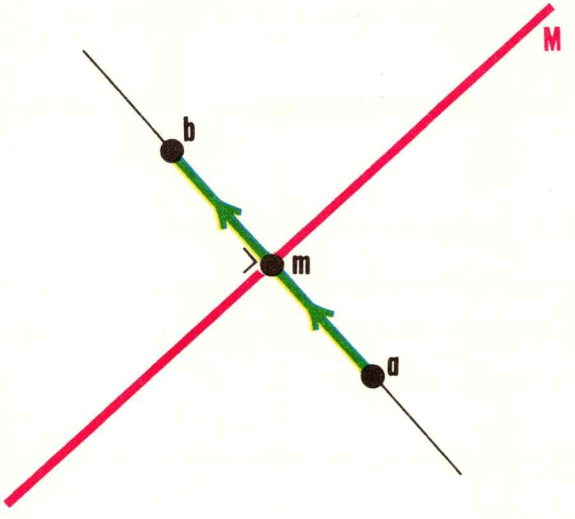


FIG. 50

La simetría del eje M aplica *a* sobre *b*, y es la única simetría que aplica *a* sobre *b* . . . puesto que el eje de toda simetría que aplica *a* sobre *b* comprende el punto medio de $\{ a, b \}$ y es perpendicular a *ab*

l.q.q.d.

DEFINICION — *La recta* M *es la* **mediatriz del par de puntos** $\{ a, b \}$

ssi

M *es el eje de la simetría que aplica* **a** *sobre* **b**

ssi

M *es la perpendicular a* **ab** *que comprende el punto medio de* $\{ a, b \}$

ssi

$$s_M(a) = b$$

4 – BISECTRIZ DE UNA CUPLA DE SEMIRRECTAS DEL MISMO ORIGEN

Traza una recta M sobre una hoja de papel.

Marca un punto *a* que no pertenece a M

Construye la imagen *b* del punto *a* por la simetría s_M

Observarás experimentalmente que doblando la hoja por M, se aplica *a* sobre *b*

Las simetrías se materializan mediante plegado.

En otra hoja traza dos semirrectas cerradas $\overline{A}$ y $\overline{B}$ de igual origen o

Observarás experimentalmente que existe uno y solo un doblez que aplica $\overline{A}$ sobre $\overline{B}$

Traducimos esto en el

AXIOMA Π 13

Si $\overline{A}$ y $\overline{B}$ **son semirrectas cerradas de igual origen o**

Entonces existe una y sólo una simetría que aplica $\overline{A}$ **sobre** $\overline{B}$

El eje de esta simetría se llama **bisectriz** *de* $(\overline{A}, \overline{B})$

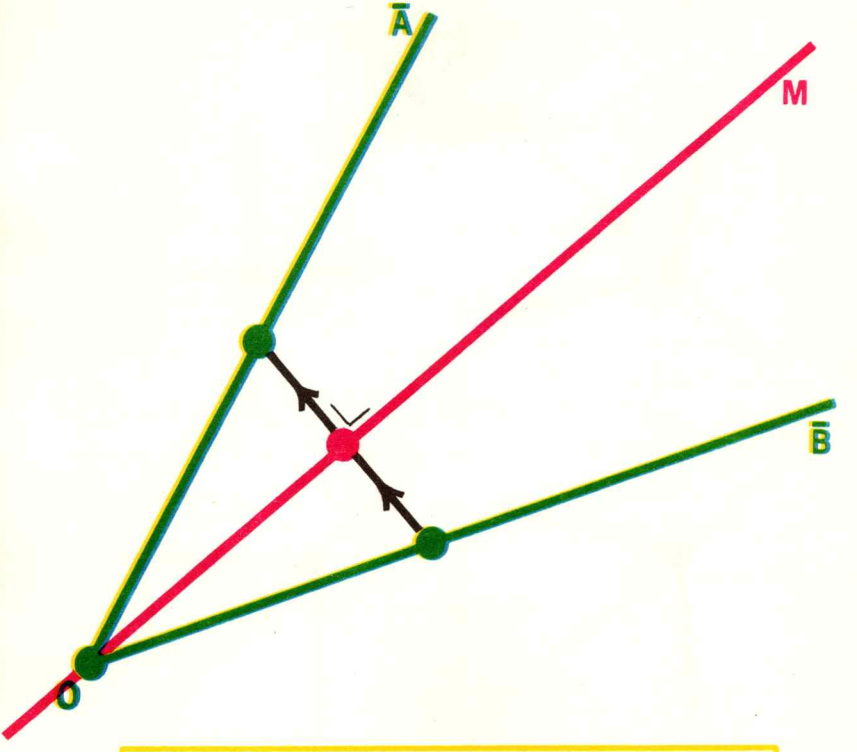
AXIOMA DE LA BISECTRIZ

La simetría s_M aplica la semirrecta $\overline{A}$ sobre la semirrecta $\overline{B}$

el origen de $\overline{A}$ sobre el origen de $\overline{B}$

o sobre o

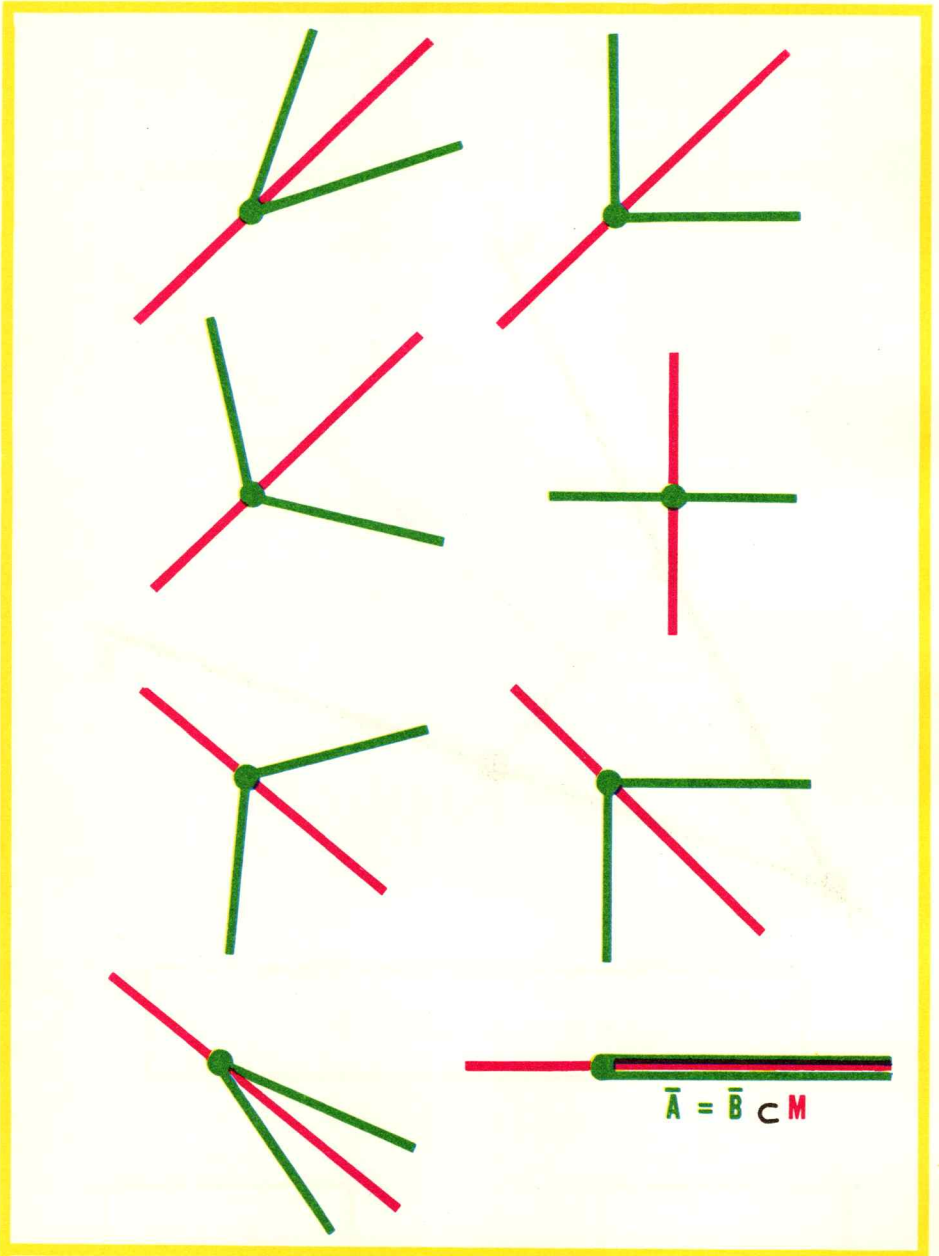
El origen o es un punto fijo de s_M y, por lo tanto, pertenece a M



M es la bisectriz de $(\overline{A}, \overline{B})$

$s_M\overline{B} = \overline{A}$ $\qquad$ $s_M\overline{A} = \overline{B}$

LA BISECTRIZ DE $(\overline{A}, \overline{B})$ FIG. 51

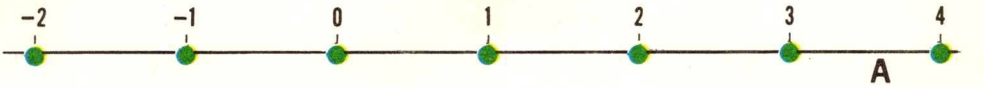


CUPLAS DE SEMIRRECTAS DE IGUAL ORIGEN Y SUS BISECTRICES FIG. 52

5 – EJERCICIOS

1. ¿Cuál es el conjunto de ejes del semiplano cerrado P?

2. He aquí una graduación G de la recta A



LA GRADUACION **G** DE LA RECTA **A**

FIG. 53

¿Cuáles son los ejes del conjunto G?

3. La recta A es el único eje de simetría de cada una de sus semirrectas.

4. ¿Cuál es el conjunto de ejes de simetría del par $\{ a , b \}$

5. He aquí un par de puntos $\{ a , b \}$ (luego $a \neq b$)

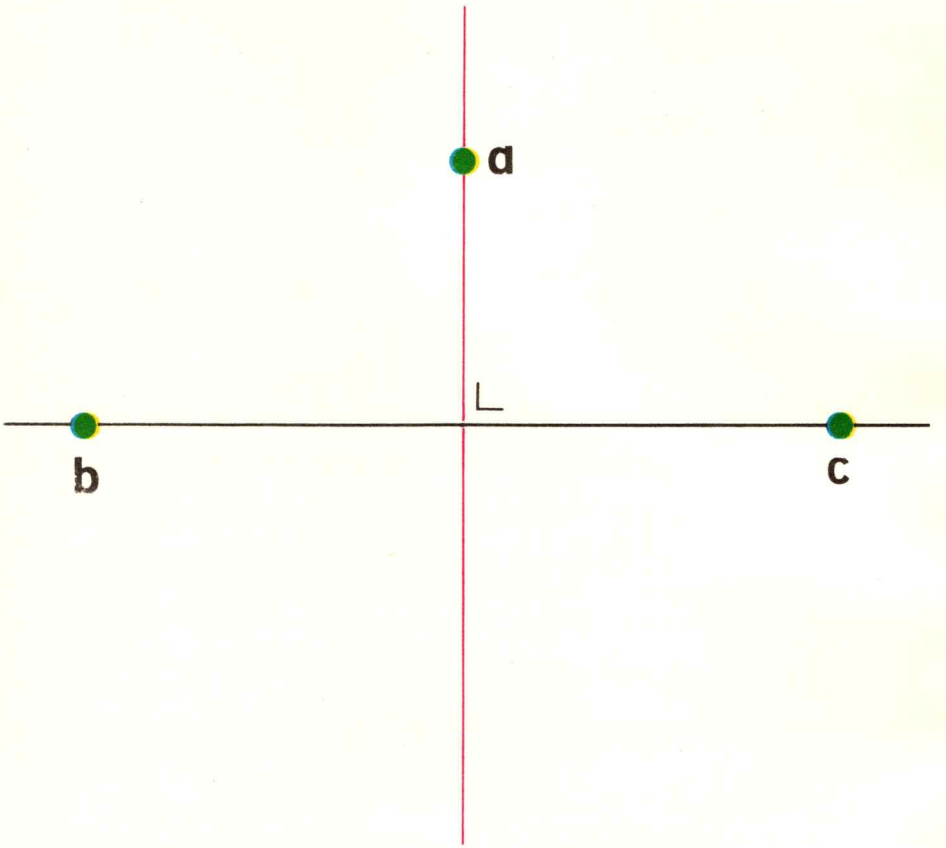
¿Cuál es el conjunto de puntos $x \in \Pi$ tales que $\{ a , b , x \}$ no tengan eje de simetría?

DEFINICION – *La terna* **(a , b , c)** *de puntos de* Π *es* **(un triángulo) isósceles** *en* **a**

ssi

existe una simetría que aplique **a** *sobre* **a** *y* **b** *sobre* **c**

6. Construye un triángulo *abc* isósceles en *a*



TRIANGULO **abc** ISOSCELES EN **a**

FIG 54

7. La terna (*a* , *a* , *a*) es isósceles en *a*

8. **Si** *a* y *b* designan puntos distintos,
Entonces la terna (*a* , *b* , *b*) es isósceles en *a* y **no** en *b*

9. He aquí dos rectas paralelas distintas A ∥ B

¿Cuál es el conjunto de ejes A ∪ B?

4

Isometrías

1 — ISOMETRIAS

DEFINICION

Las **isometrías** (del plano Π)

son las compuestas de sucesiones finitas de simetrías (ortogonales).

El conjunto de isometrías de Π *se anota* $\mathfrak{I}$

$$\mathfrak{I} = \{ s_n \circ \ldots \circ s_1 \mid n \in \omega_0 \ ; \ s_1, \ldots, s_n \in \mathfrak{s} \}$$

Toda **simetría** (ortogonal) es una **isometría**

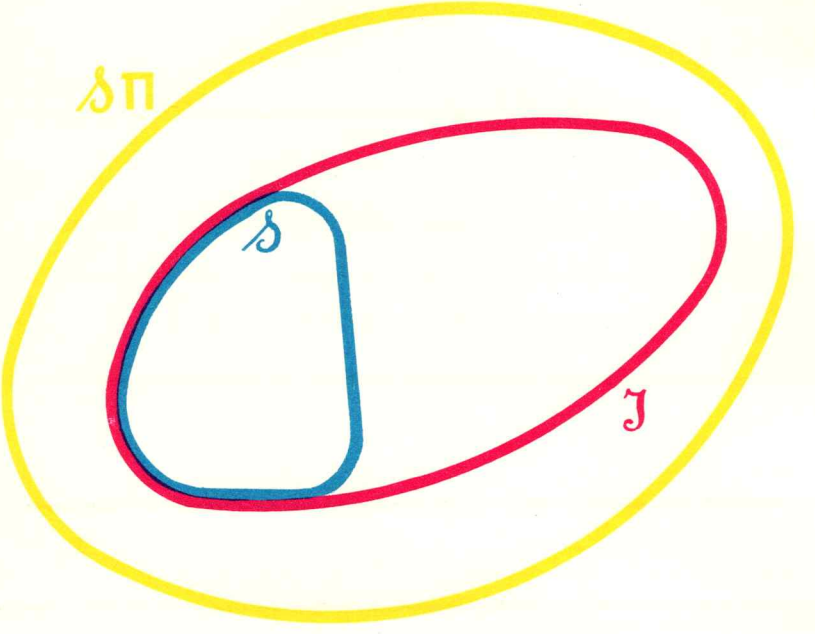
$$\mathfrak{s} \subset \mathfrak{I}$$

Toda **simetría** (ortogonal) es una **simetría** paralela.

El teorema 2.5 se aplica a las isometrías.

Toda isometría es una permutación de Π

$$\mathcal{I} \subset \mathcal{S}\Pi$$



$$\mathcal{S} \subset \mathcal{I} \subset \mathcal{S}\Pi$$

FIG. 55

2 – CONVENCION DE LAS RECTAS NUMERADAS

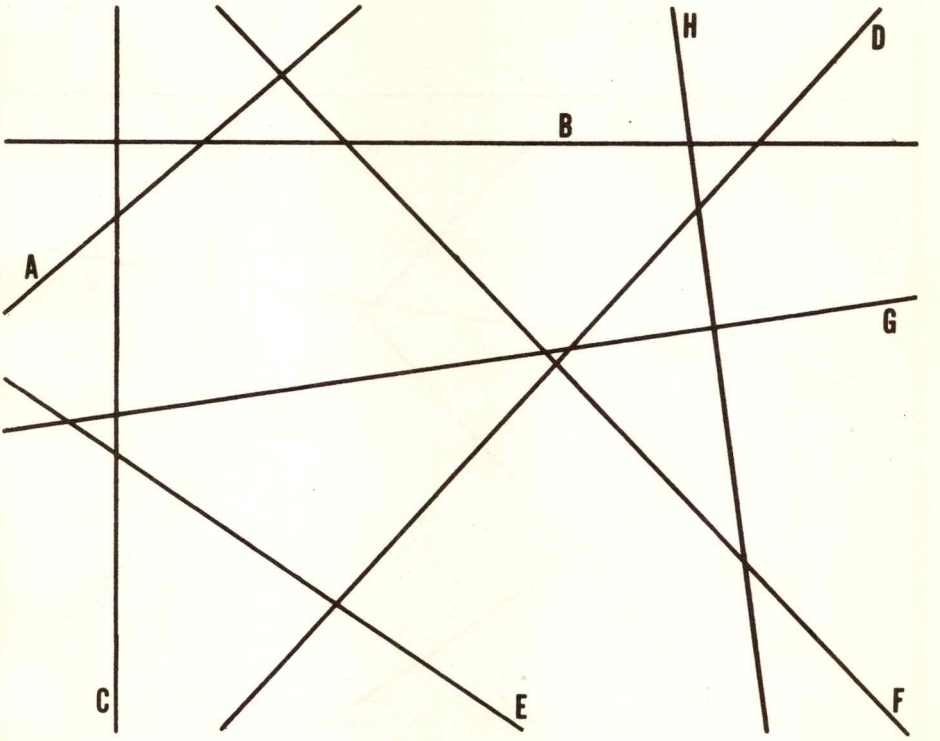


FIG. 56

La sucesión de rectas de Π $\quad A\ ,\ B\ ,\ C\ ,\ D\ ,\ E\ ,\ F\ ,\ G\ ,\ H$

define la sucesión de **simetrías** $\quad s_A\ ,s_B\ ,\ s_C\ ,\ s_D\ ,\ s_E\ ,\ s_F\ ,\ s_G\ ,\ s_H$

y la compuesta $\quad s_H \circ s_G \circ s_F \circ s_E \circ s_D \circ s_C \circ s_B \circ s_A$

La **isometría** $\quad s_H \circ s_G \circ s_F \circ s_E \circ s_D \circ s_C \circ s_B \circ s_A$

se indicará por la numeración de las rectas $\quad A\ ,\ B\ ,\ C\ ,\ D\ ,\ E\ ,\ F\ ,\ G\ ,\ H$

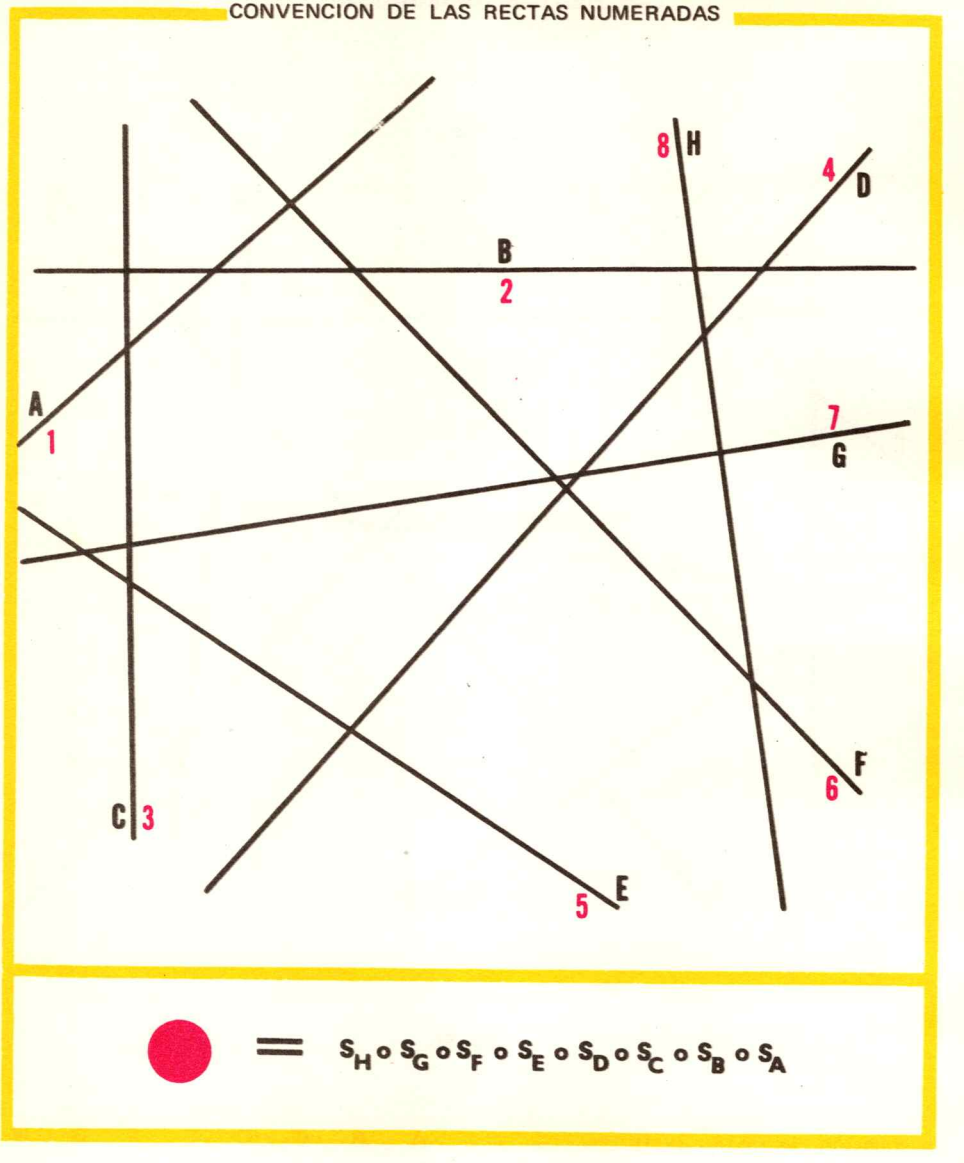

CONVENCION DE LAS RECTAS NUMERADAS
A
1
B
2
C
3
D
4
E
5
F
6
G
7
H
8
$S_H \circ S_G \circ S_F \circ S_E \circ S_D \circ S_C \circ S_B \circ S_A$

FIG. 57

3 – EL GRUPO DE ISOMETRIAS

PROPOSICION

$\mathfrak{I}$ *es el subgrupo de* $\mathfrak{S}\Pi$, o *engendrado por* $\mathfrak{S}$

$\mathfrak{I}$, o es un grupo

DEMOSTRACION :

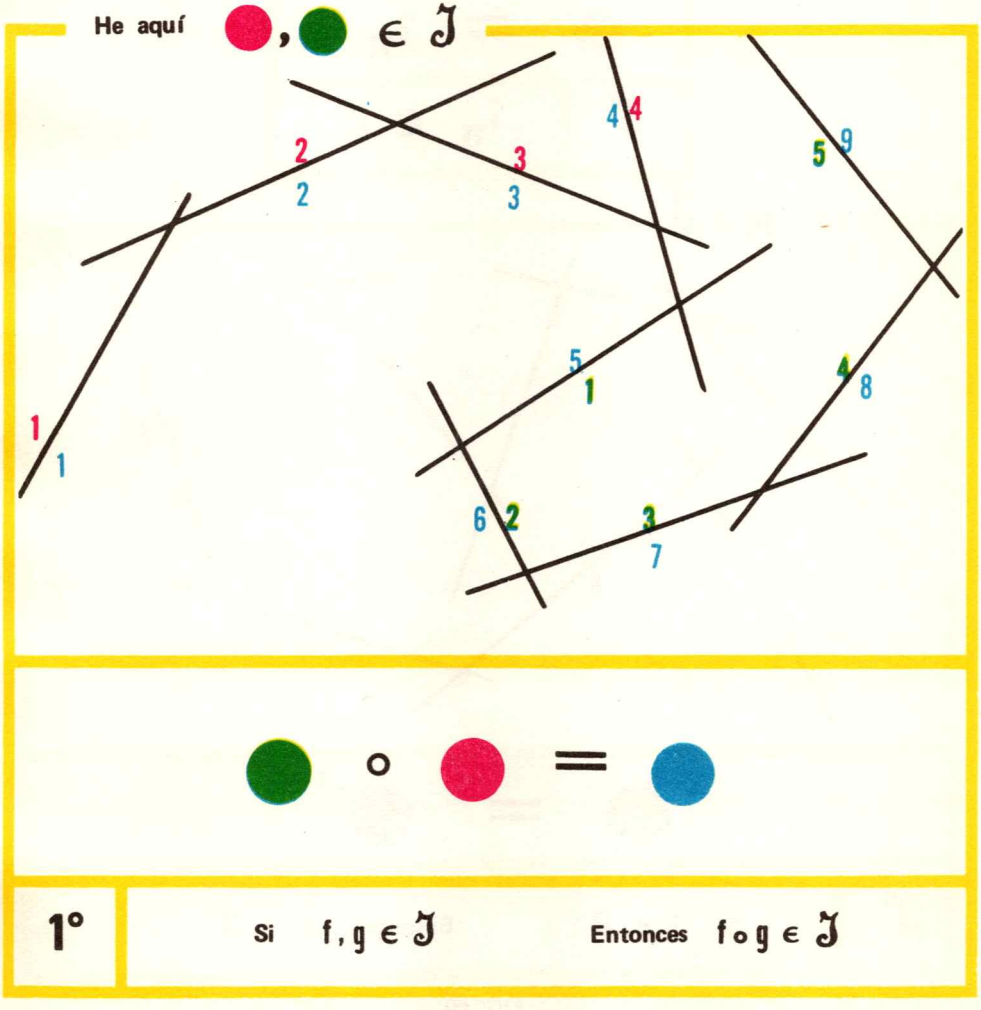


FIG. 58

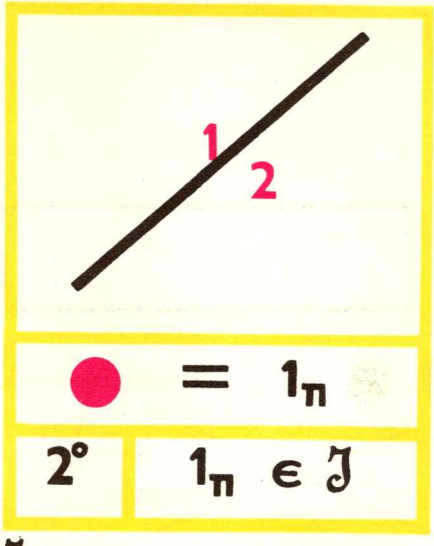

1
2
= 1_π
2°
$1_\pi \in \mathcal{J}$

FIG. 59

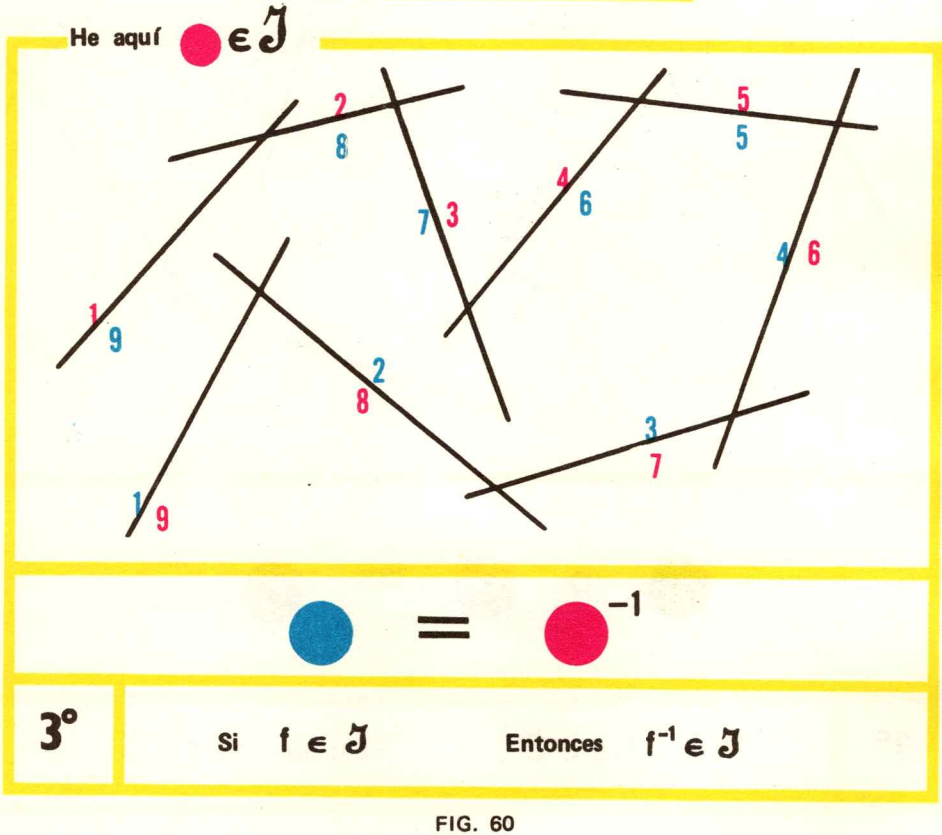

He aquí ● ∈ 𝒥
2
8
7
3
4
6
5
5
4
6
1
9
2
8
3
7
1
9
= $^{-1}$
3°
Si f ∈ 𝒥
Entonces $f^{-1} \in \mathcal{J}$

FIG. 60

1º	2º	3º	$\mathfrak{I}$ *es un* **subgrupo** *de* $\mathcal{S}\Pi$, o

Finalmente probemos que :

$\mathfrak{I}$ *es el menor subgrupo de* $\mathcal{S}\Pi$, o *que contiene a* $\mathcal{S}$

He aquí un subgrupo G de $\mathcal{S}\Pi$, o que contiene a $\mathcal{S}$

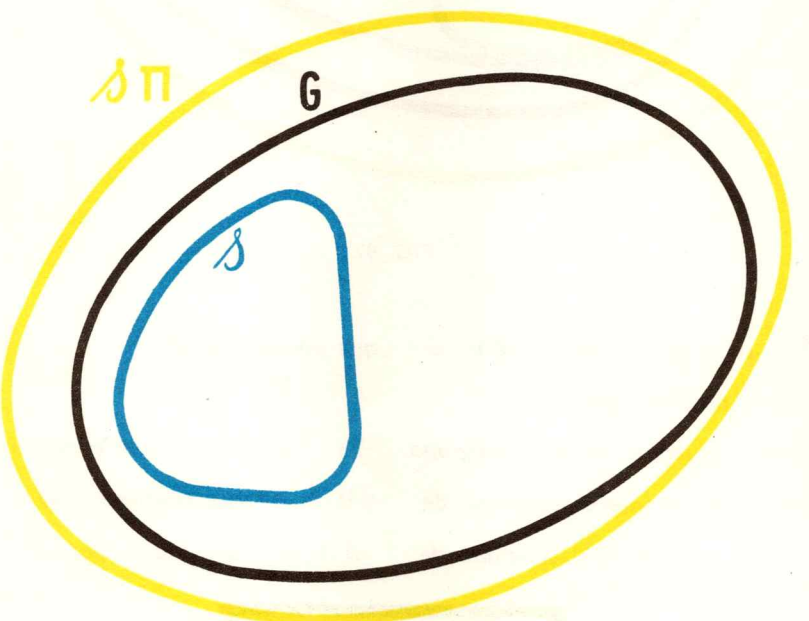


FIG. 61

El grupo G , o comprende todas las simetrías
y por tanto comprende también todas sus compuestas, es decir, las isometrías:
G contiene a $\mathcal{I}$

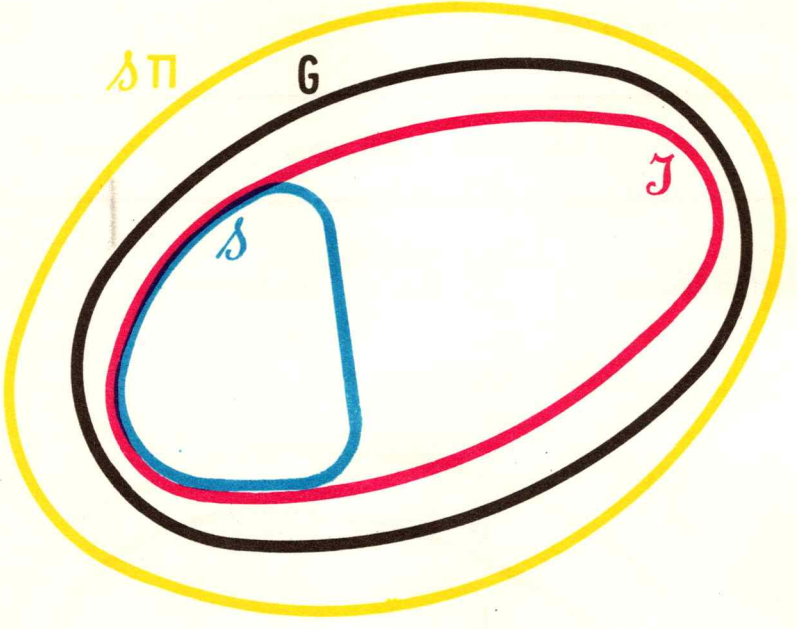


FIG. 62

$\mathcal{I}$ *es un subgrupo de* $\mathcal{S}\Pi$, o *que contiene a* $\mathcal{S}$

Hemos probado que

$\mathcal{S}$ *está contenido en todo subgrupo* G *de* $\mathcal{S}\Pi$, o *que contiene a* $\mathcal{S}$

$\mathcal{I}$ es, pues, **el menor subgrupo de** $\mathcal{S}\Pi$, o **que contiene a** $\mathcal{S}$

es decir, el subgrupo de $\mathcal{S}\Pi$, o engendrado por $\mathcal{S}$

l.q.q.d.

$$\mathcal{I} = \text{grp } \mathcal{S}$$

Sabemos que las isometrías forman grupo.

Y, sin embargo, no las hemos examinado individualmente.

Lo haremos en los capítulos 5 a 8.

En los últimos párrafos del presente capítulo demostraremos que además de las simetrías, el conjunto $\mathfrak{I}$ incluye también algunos de nuestros viejos conocidos.

4 — SIMETRIAS CENTRALES

Problema

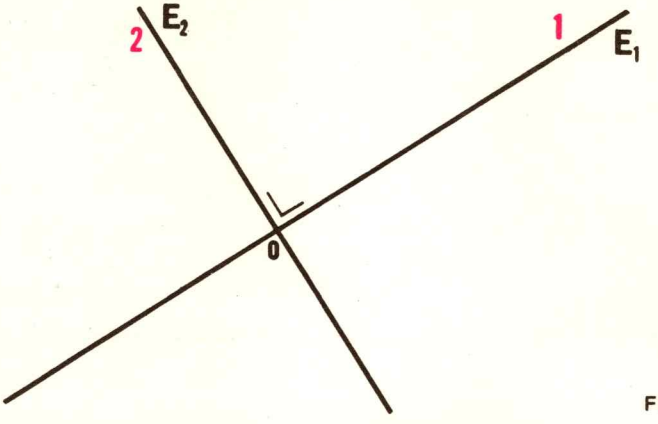


FIG. 63

Solución

S_{E_1}

S_{E_2}

$S_{E_2} \circ S_{E_1}$

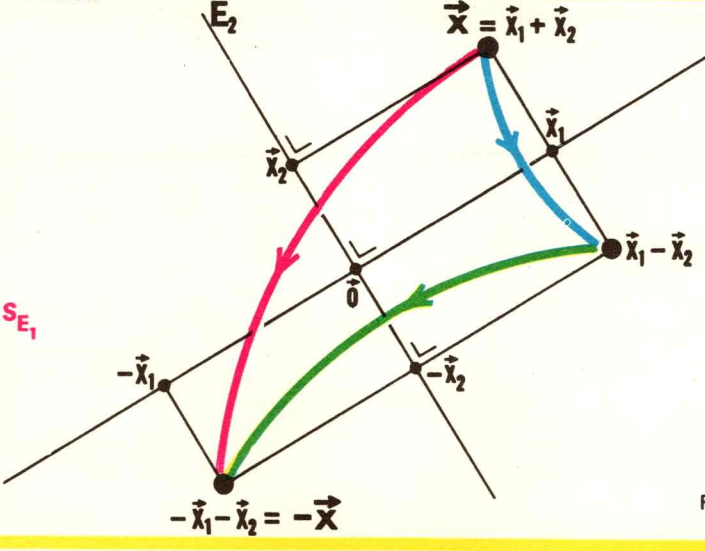
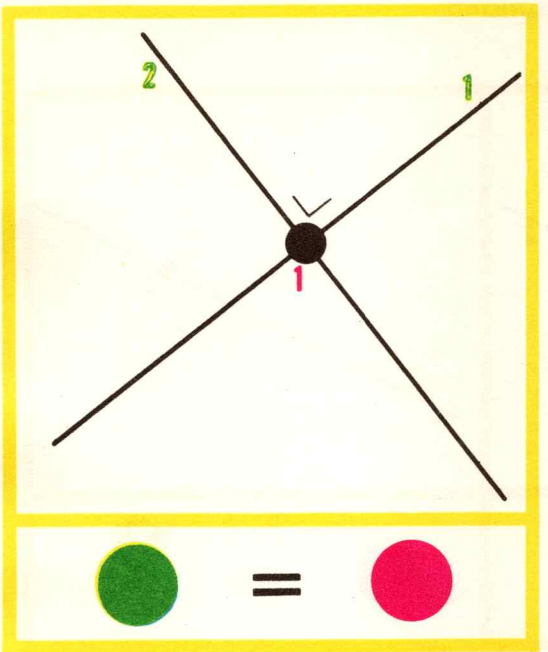


FIG. 64

$$S_{E_2} \circ S_{E_1} = S_O$$

La compuesta de dos simetrías de **ejes perpendiculares** *es una* **simetría central.**



Toda **simetría central**
es la compuesta de una
cupla de **simetrías**
(de ejes perpendiculares)

Toda simetría central
es una
isometría

$\mathcal{C} \subset \mathcal{I}$

FIG. 65

El conjunto de puntos fijos de toda **simetría central** es un **conjunto unitario.**
El conjunto de puntos fijos de toda **simetría** (ortogonal) es una **recta.**

$\mathcal{C} \cap \mathcal{S} = \phi$

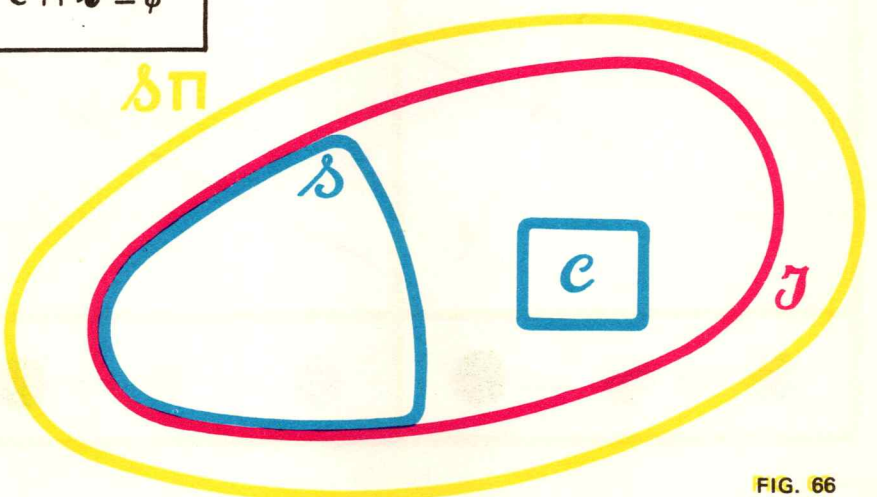


FIG. 66

5 – CRITERIO DE PERPENDICULARIDAD

Problema

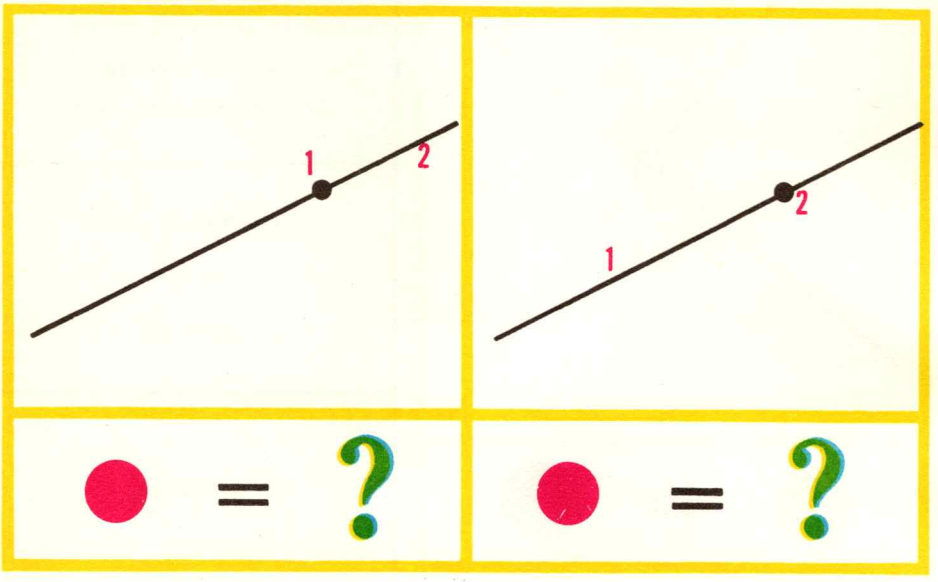


FIG. 67

Solución

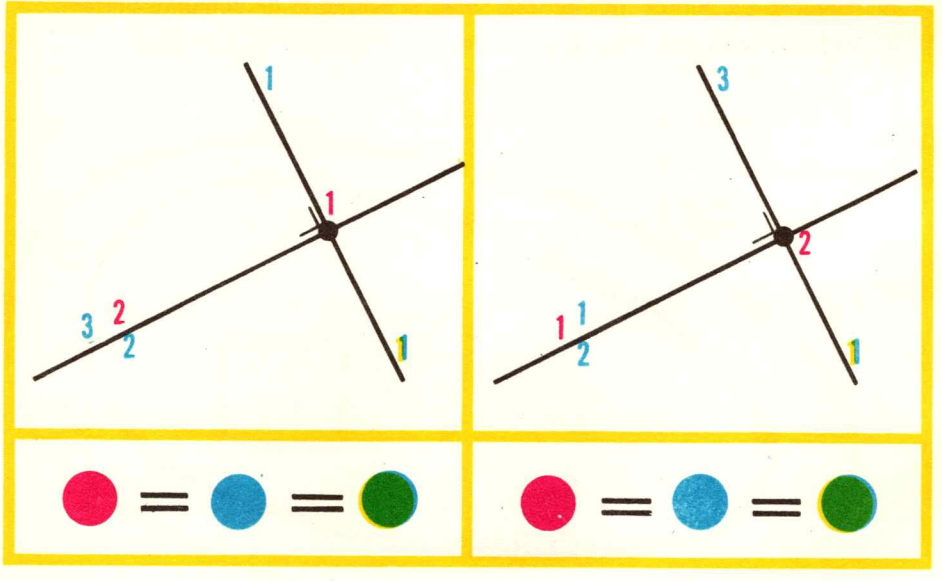


FIG. 68

PROPOSICION

Si o *es el punto de intersección de las rectas perpendiculares* A , B

Entonces

$$s_B \circ s_A = s_o = s_A \circ s_B$$

$$s_o \circ s_A = s_B = s_A \circ s_o$$

$$s_B \circ s_o = s_A = s_o \circ s_B$$

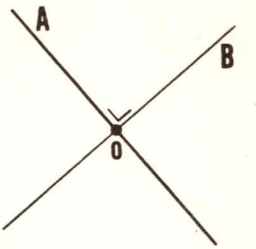


FIG. 69

CRITERIO DE PERPENDICULARIDAD

$$\forall\, A, B \in \mathfrak{D} \quad : \quad A \perp B \iff s_B \circ s_A \in \mathfrak{C}$$

La implicación $\Longrightarrow$ ya se probó en (4 . 4)

DEMOSTRACION DE $\Longleftarrow$

He aquí las rectas A , B tales que $s_B \circ s_A \in \mathfrak{C}$

Llamemos o al centro de la simetría central $s_B \circ s_A$

Luego

$$s_B \circ s_A = s_o$$

de donde $s_B = s_B \circ s_A \circ s_A = s_o \circ s_A$

Pero, en virtud de la proposición 4 . 5, $s_o \circ s_A$ es la simetría cuyo eje P es la perpendicular a A que comprende o

De donde se sigue que $s_B = s_o \circ s_A = s_P$

$$s_B = s_P$$

$$B = P$$

$$B \perp A$$

l.q.q.d.

6 — TRASLACIONES

Problema

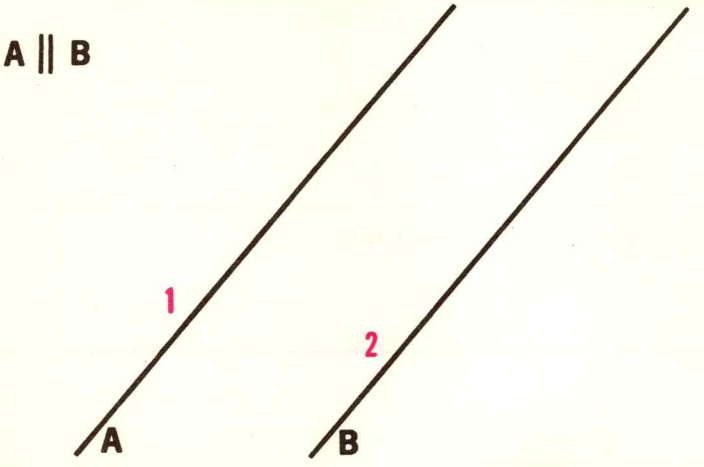


FIG. 70

Solución

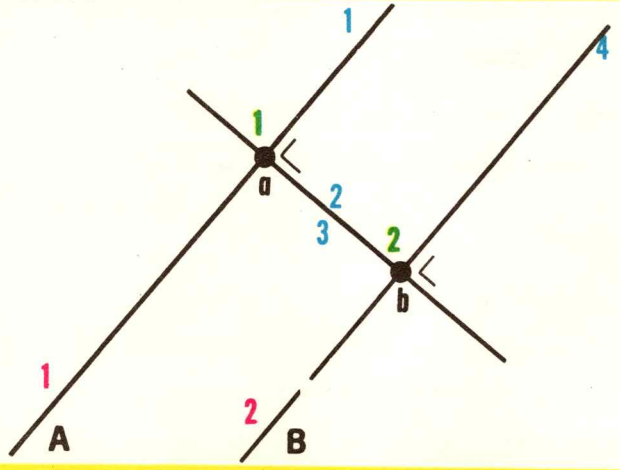
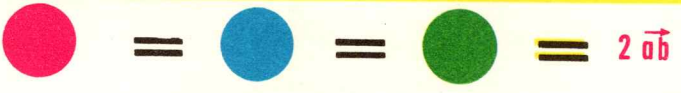


FIG. 71



$S_B \circ S_A = S_b \circ S_a$

t *es una* **traslación**

⇕

t *es la compuesta de* **una cupla de simetrías centrales**

⇕

t *es la compuesta de una* **cupla de simetrías de ejes paralelos**

⇓

t *es una* **isometría**

$\mathfrak{T} \subset \mathfrak{I}$

Toda traslación es una isometría.

El conjunto de puntos fijos de una traslación es Π o ϕ
El conjunto de puntos fijos de una simetría central es un **conjunto unitario.**
El conjunto de puntos fijos de una simetría es una **recta.**

De donde se tiene la situación

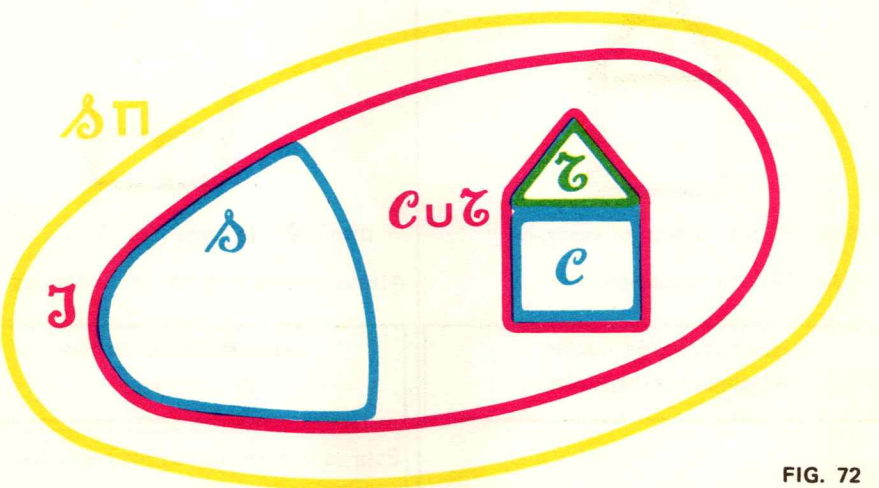


FIG. 72

SITUACIONES ANALOGAS

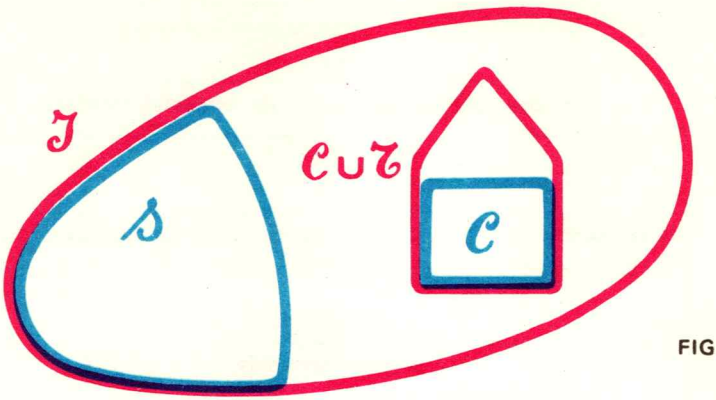


FIG. 73

Todo elemento de $\mathcal{C}$ es una permutación igual a su recíproca	Todo elemento de $\mathcal{S}$ es una permutación igual a su recíproca
$\mathcal{C} \cup \mathcal{T}$ = grp $\mathcal{C}$	$\mathcal{J}$ = grp $\mathcal{S}$

¿Esta analogía continúa?

La casa $\mathcal{C} \cup \mathcal{T}$ tiene 2 pisos :

El piso $\mathcal{C}$ de **simetrías centrales**

El piso $\mathcal{T}$ de traslaciones ó

compuestas de cuplas de simetrías centrales

En la casa $\mathcal{J}$ conocemos

el piso $\mathcal{S}$ de **simetrías**

Ahora resulta natural examinar las

compuestas de cuplas de simetrías

Esta es la finalidad de los capítulos 5 a 8

EJERCICIOS

1.

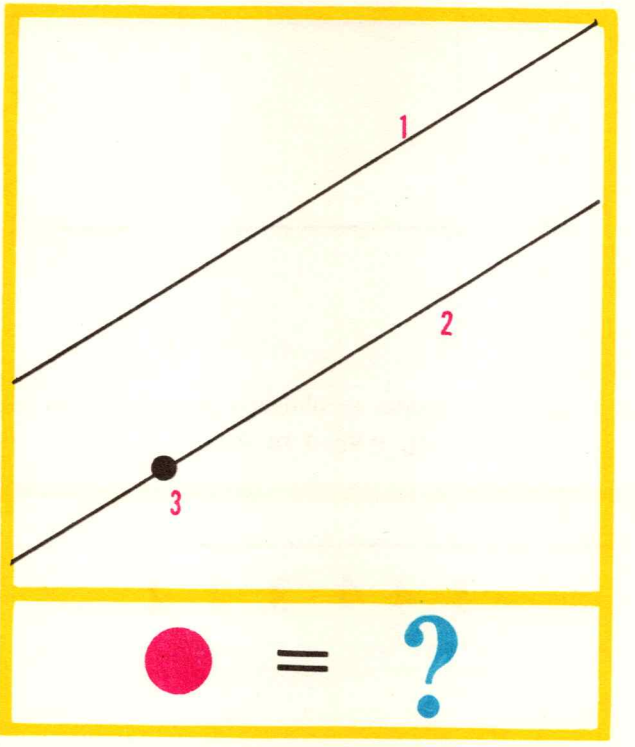


FIG. 74

2.

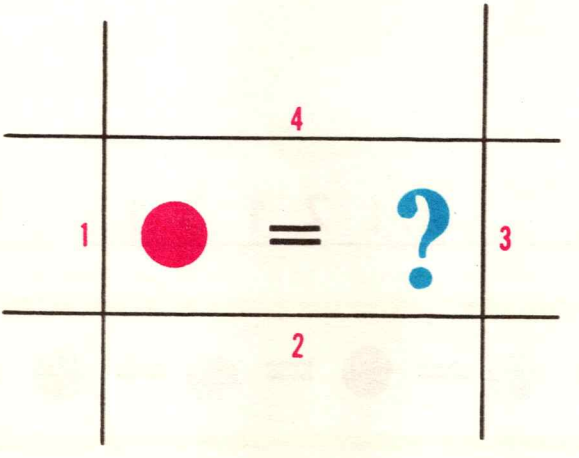


FIG. 75

3.

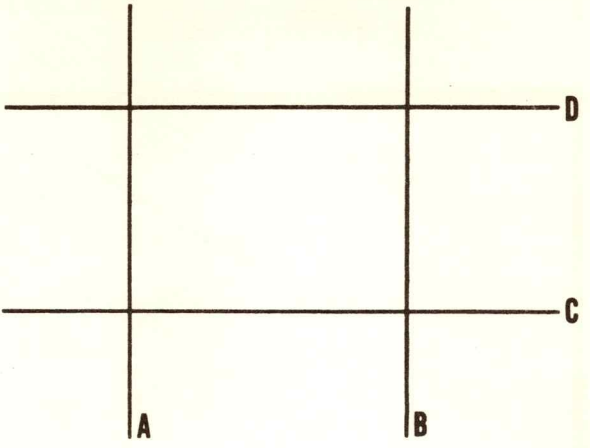


FIG. 76

¿Cuántas compuestas distintas se obtienen permutando los factores en

$$s_D \circ s_C \circ s_B \circ s_A$$

4.

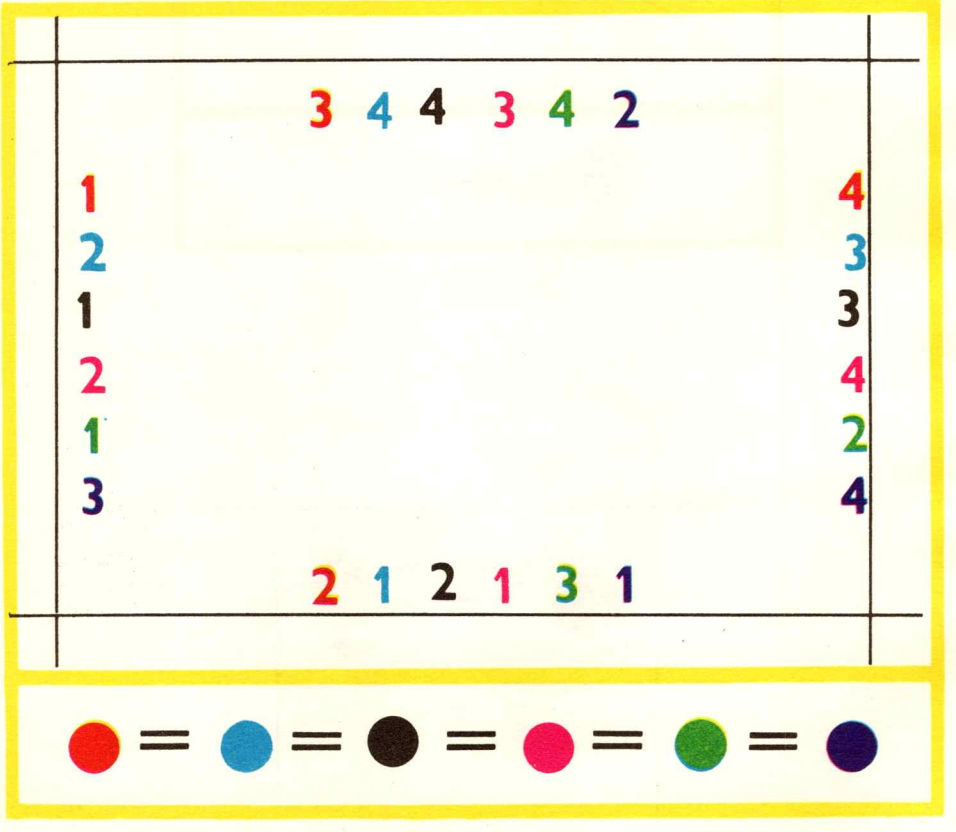


FIG. 77

5.

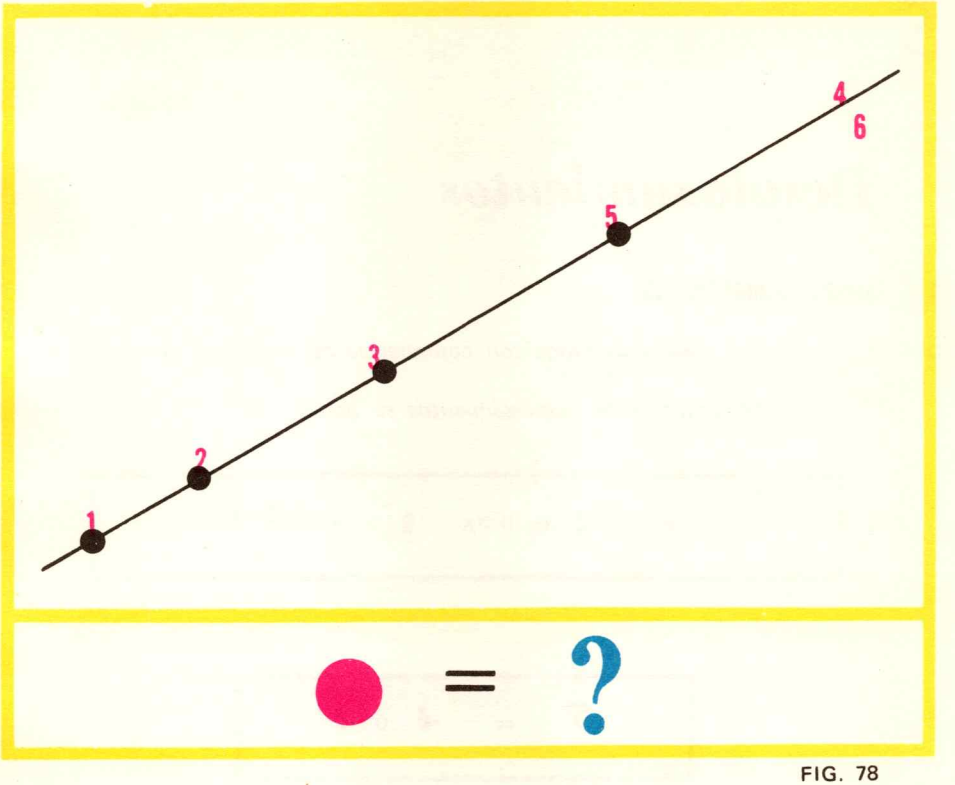


FIG. 78

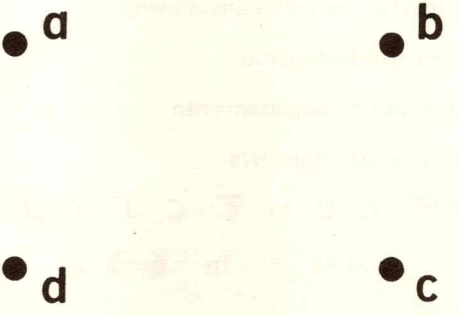


FIG. 79

¿Cuántas compuestas distintas se obtienen permutando los factores en

$$s_d \circ s_c \circ s_b \circ s_a$$

5

Desplazamientos

1 – DESPLAZAMIENTOS

DEFINICION – *Los* **desplazamientos** *son compuestas de cuplas de simetrías.*

El conjunto de desplazamientos se anota $\mathfrak{I}^+$

$$\mathfrak{I}^+ = \{ s_B \circ s_A \mid A, B \in \mathfrak{D} \}$$

Resumiendo :

$$\mathfrak{I}^+ = \mathfrak{s} \circ \mathfrak{s}$$

EJEMPLOS

1. La transformación idéntica es un desplazamiento : $1_\Pi \in \mathfrak{I}^+$
2. Toda **traslación** es un desplazamiento : $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{I}^+$
3. Toda **simetría central** es un desplazamiento : $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{I}^+$
4. Todo desplazamiento es una isometría : $\mathfrak{I}^+ \subset \mathfrak{I}$
5. $1\ 1_\Pi \in \mathfrak{T} \subset \mathfrak{C} \cup \mathfrak{T} \subset \mathfrak{I}^+ \subset \mathfrak{I} \subset \mathfrak{s}\Pi$
6. $\forall\ A, B \in \mathfrak{D} : s_B \circ s_A = 1_\Pi \iff s_A = s_B \iff A = B$
7. **Si** $A \parallel B$
   Entonces $s_B \circ s_A$ es una traslación.

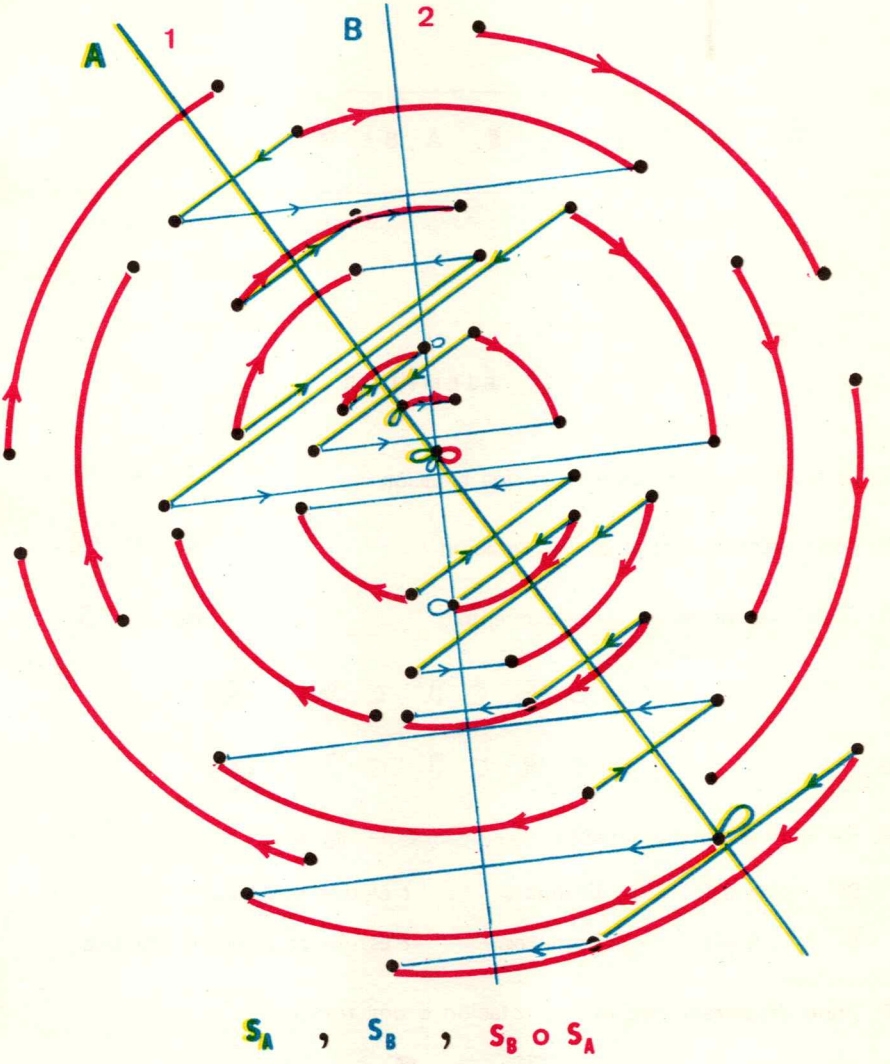
Falta examinar los desplazamientos $s_B \circ s_A$ cuando A y B son secantes.

Problema

He aquí dos rectas A , B *tales que* { o } = A ∩ B

Dibujar muchas flechas de un esquema de s_B o s_A

Solución



"¡DA VUELTA!" FIG. 80

2 – ROTACIONES

DEFINICION – *Las* **rotaciones** *son compuestas de cuplas de simetrías cuyos ejes no son disjuntos*

El conjunto de rotaciones se designa $\mathcal{R}$

$$\mathcal{R} = \{ s_B \circ s_A \mid A, B \in \mathcal{D} \text{ y } A \cap B \neq \phi \}$$

EJEMPLOS

1. La transformación idéntica es una rotación : $1_\Pi \in \mathcal{R}$

2. Toda simetría central es una rotación : $\mathcal{C} \subset \mathcal{R}$

3. Toda rotación es un desplazamiento : $\mathcal{R} \subset \mathcal{T}^+$

4. $1_\Pi \in \mathcal{R} \subset \mathcal{T}^+ \subset \mathcal{T} \subset \mathcal{S}\Pi$

5. $\mathcal{C} \subset \mathcal{R} \subset \mathcal{T}^+ \subset \mathcal{T} \subset \mathcal{S}\Pi$

6. He aquí un desplazamiento $t = s_B \circ s_A$

   Si $A \parallel B$ **Entonces** t es una traslación

   Si $A \nparallel B$ **Entonces** t es una rotación no idéntica.

7. Todo desplazamiento es una rotación o una traslación.

$$\mathcal{T}^+ = \mathcal{T} \cup \mathcal{R}$$

3 – CENTRO DE ROTACION

He aquí $A, B \in \mathfrak{D}$ y $o \in A \cap B$

$o \in A$ y $o \in B$ implican

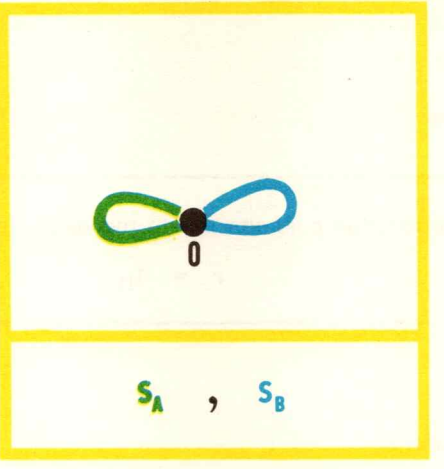


FIG. 81

Luego

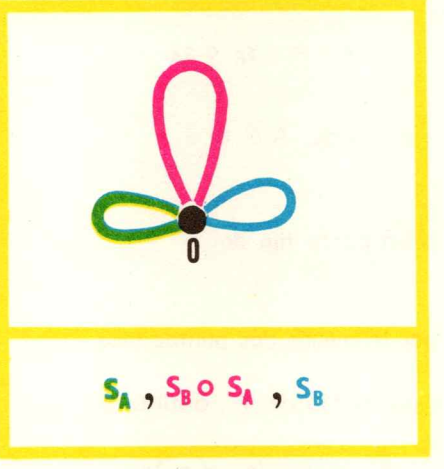


FIG. 82

Si	$A, B \in \mathfrak{D}$ y $o \in A \cap B$
Entonces	o es un punto fijo de la rotación s_B o s_A

PROPOSICION

La transformación idéntica es la única rotación que admite varios puntos fijos.

Se debe probar que :

Si	la rotación r admite por lo menos dos puntos fijos
Entonces	$r = 1_\Pi$

He aquí una rotación r

Luego, existen rectas no disjuntas A , B tales que

$$r = s_B \circ s_A$$

Llamemos o a un punto de $A \cap B$

Sabemos que o es un punto fijo de r

Como r admite por lo menos dos puntos fijos,

llamemos x a un punto fijo de r , distinto de o

$$o \neq x = (s_B \circ s_A)x$$

Estableceremos que A = B , es decir que

$$r = s_B \circ s_A = 1_\Pi$$

DEMOSTRACION :

o bien	o bien
$x \in A$	$x \notin A$
$s_A x = x$	$s_A x = y \neq x$

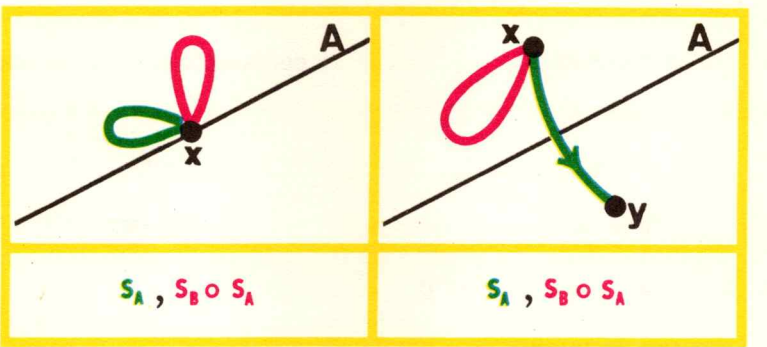


FIG. 83

Luego

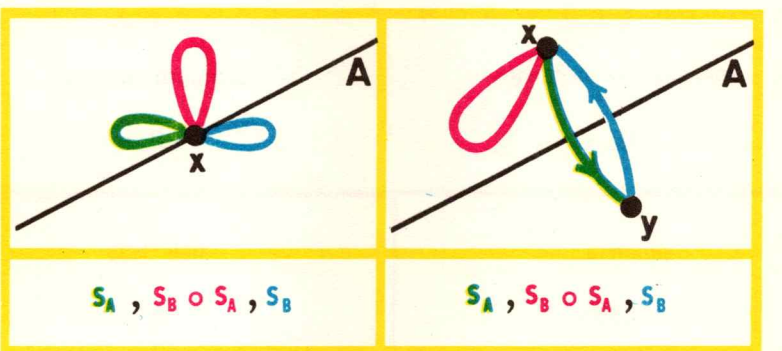


FIG. 84

$s_B x = x$	$s_A x = y$ $\quad s_B y = x$
$x \in B$	A es mediatriz del par $\{ x, y \}$
$A = ox = B$	B es mediatriz del par $\{ x, y \}$
$A = B$	$A = B$

$r = s_B \circ s_A = s_A \circ s_A = 1_\Pi$ l.q.q.d.

DEFINICION — *En el caso de las rotaciones los puntos fijos reciben el nombre de* **centros** *El conjunto de rotaciones que admite el punto* **c** *como centro se anota* $\mathcal{R}_c$

TEOREMA

Π es el conjunto de centros de la rotación idéntica 1_Π
Toda rotación no idéntica admite uno y sólo un centro

4 – PUNTOS FIJOS

A y B designan rectas

ISOMETRIAS	CONJUNTO DE PUNTOS FIJOS
s_A	A
simetría	una recta
s_B o s_A con $A \cap B = \phi$	ϕ
traslación no idéntica	ϕ
s_B o s_A con $\{ o \} = A \cap B$	$\{ o \}$
rotación no idéntica	conjunto unitario
1_Π	Π
simetría	una recta
traslación	ϕ o Π
rotación	conjunto unitario ó Π
desplazamiento	ϕ ó conjunto unitario ó Π

Conclusiones

$$\mathcal{S} \cap \mathcal{T}^+ = \phi$$

$$\mathcal{R} \cap \mathcal{C} = \{ 1_\Pi \}$$

5 – CLASIFICACION DE LOS DESPLAZAMIENTOS

Sean $A, B \in \mathfrak{D}$ Estudiemos $s_B \circ s_A$ en las tres eventualidades

$A \cap B = \phi$ $A = B$ $A \cap B = \{ o \}$

$A \cap B = \phi \Longrightarrow s_B \circ s_A$ es una traslación sin punto fijo

$A = B \Longrightarrow s_B \circ s_A = 1_\Pi$ (y Π es el conjunto de los puntos fijos de $s_B \circ s_A$)

$A \cap B = \{ o \} \Longrightarrow s_B \circ s_A$ es una rotación que admite el único punto fijo o

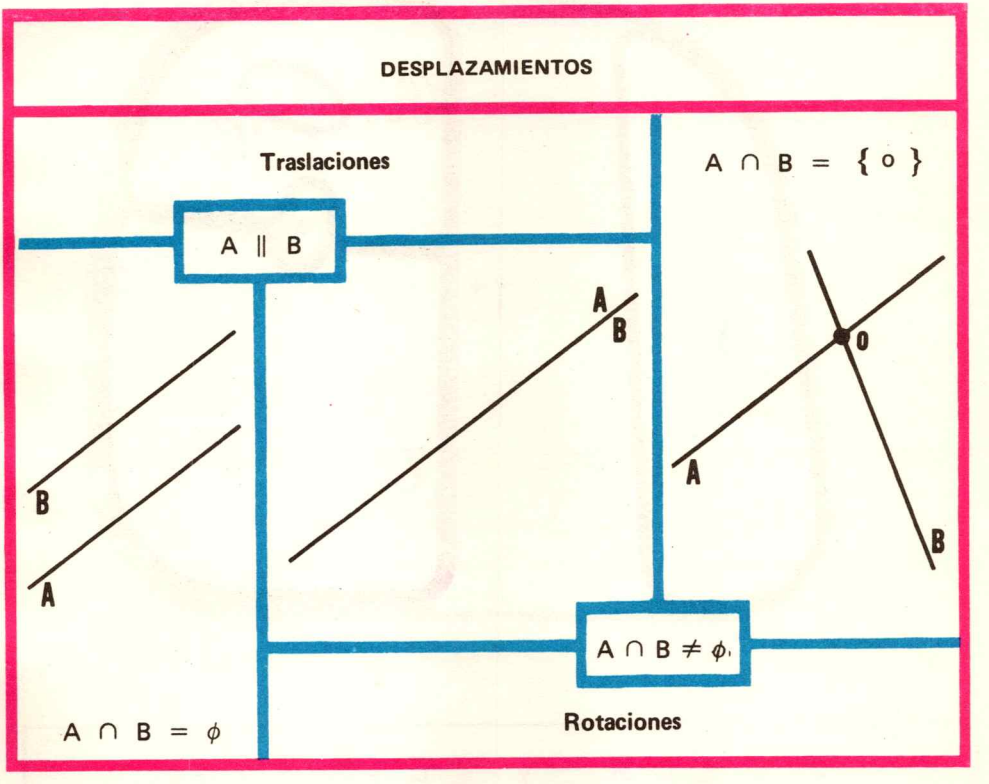


FIG. 85

Luego,

$s_B \circ s_A$ es una traslación no idéntica **ssi** $A \cap B = \phi$

$s_B \circ s_A = 1_\Pi$ **ssi** $A = B$

$s_B \circ s_A$ es una rotación no idéntica **ssi** $A \cap B$ es un conjunto unitario.

Se deduce además que

$s_B \circ s_A$ es una traslación **ssi** $A \parallel B$

$s_B \circ s_A$ es una rotación **ssi** $A \cap B \neq \phi$

CRITERIO DE PARALELISMO

$$\forall A, B \in \mathfrak{D} \quad : \quad A \parallel B \iff s_B \circ s_A \in \mathfrak{T}$$

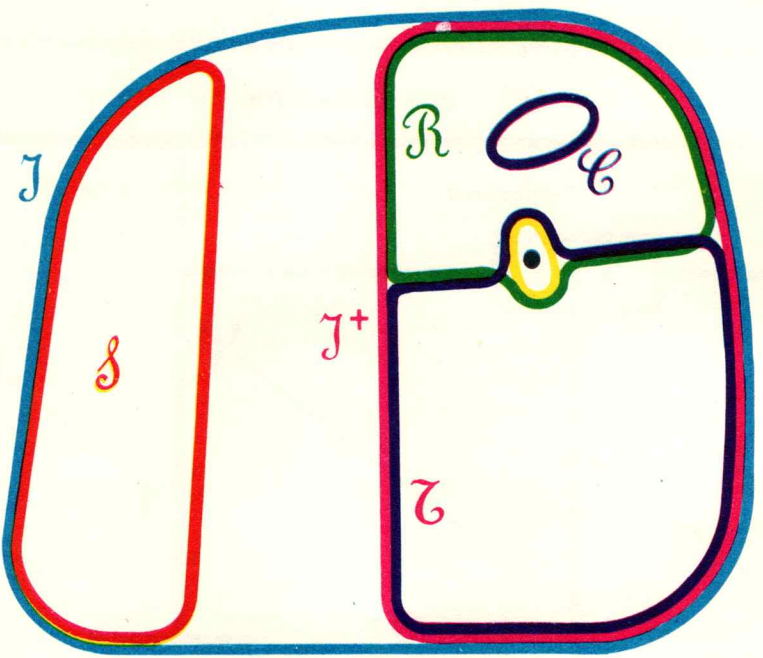


FIG. 86

$$\mathcal{J}^+ = \mathfrak{T} \cup \mathcal{R} \quad \text{y} \quad \mathfrak{T} \cap \mathcal{R} = \{ 1_\Pi \}$$

EJERCICIOS

¿Quieres representar mediante un punto en la figura 86 :

a) una homotecia de razón 2

b) la transformación de Π que intercambia los puntos x e y de Π y deja fijos todos los otros.

c) una homotecia de razón 1

d) la compuesta de la transformación t con una homotecia de razón 2

e) una homotecia de razón -1

f) la compuesta de 87 simetrías centrales

g) una homotecia de razón nula

h) una proyección del plano Π sobre la recta A y paralela a la recta B.

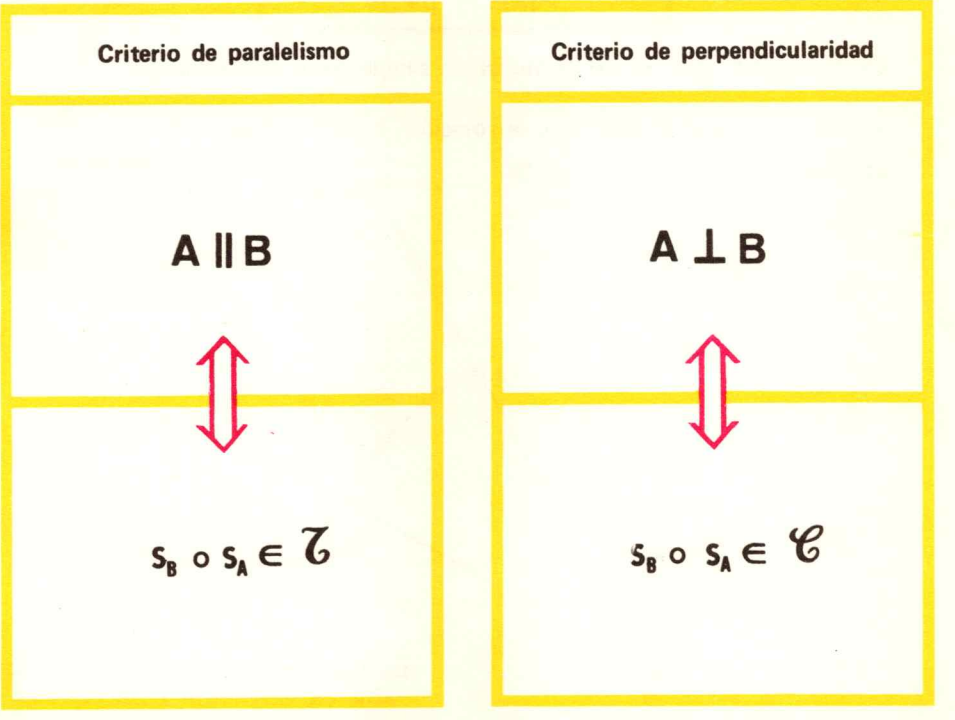


FIG. 87

6

Rotaciones

1 – SEMIRRECTAS

Toda rotación es una isometría.

Luego, toda rotación aplica cada recta sobre una recta,

respetando abcisa y paralelismo.

En particular, la imagen de la **semirrecta** $[ab$ por la rotación r es la semirrecta $[ra\,.\,rb$

$$r\,[ab \;=\; [ra\,.\,rb$$

En el término $[ra\,.\,rb$, el punto es un simple signo de separación.

Si o es el centro de la rotación r y $o \neq p \in \Pi$

Entonces $r\,[o\,p \;=\; [\,o\,.\,rp$

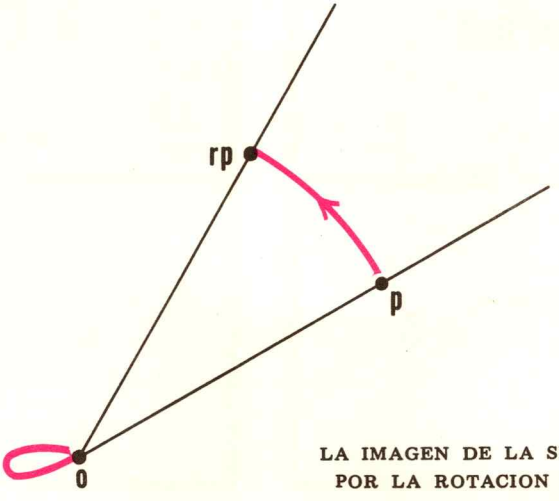


FIG. 88

LA IMAGEN DE LA SEMIRRECTA [o p POR LA ROTACION r DE CENTRO o ES LA SEMIRRECTA [o . r p

Invirtamos la situación.

Problema

He aquí las semirrectas cerradas $\overline{A}$, $\overline{B}$ *de origen* o

¿Existe una rotación r *de centro* o *que aplica* $\overline{A}$ *sobre* $\overline{B}$?

Solución

Llamemos A , B a las rectas que contienen a $\overline{A}$, $\overline{B}$

M es la bisectriz de la cupla $(\overline{A}, \overline{B})$

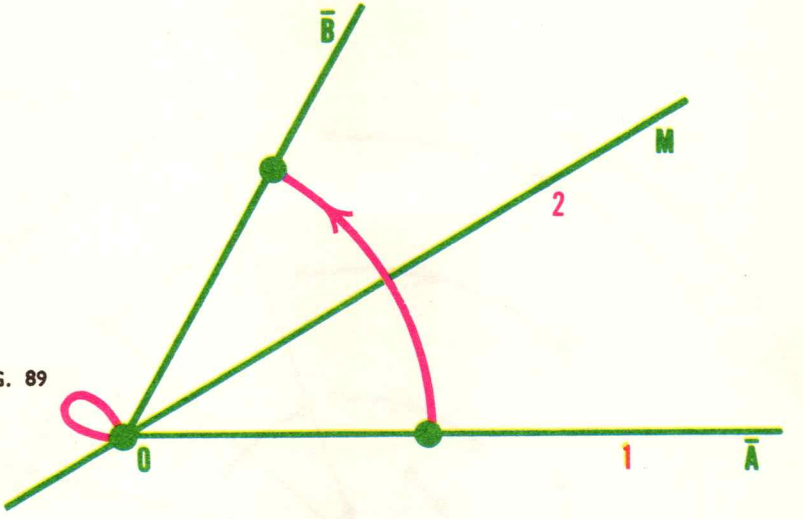


FIG. 89

La simetría s_A aplica $\overline{A}$ sobre $\overline{A}$

La simetría s_M aplica $\overline{A}$ sobre $\overline{B}$

Luego,

la rotación $r = \bullet = s_M \circ s_A$ aplica $\overline{A}$ sobre $\overline{B}$

Hemos probado así la

PROPOSICION

Si $\overline{A}$ y $\overline{B}$ *son semirrectas cerradas de origen* o

Entonces *existe una rotación* r (*de centro* o) *tal que* $r\,\overline{A} = \overline{B}$

¿ Es única esta rotación ?

Ver § 2

2 – AXIOMA DE LA ROTACION

He aquí el punto o

la semirrecta cerrada $\overline{A}$, de origen o , incluída en la recta A

la recta M comprende a o

muchos de puntos *a* , *b* , *c* , *d* , ...

Construyamos las imágenes de estos puntos y la de la semirrecta $\overline{A}$ por la rotación $r = s_M \circ s_A$ y hagamos $\overline{B} = r\,\overline{A}$

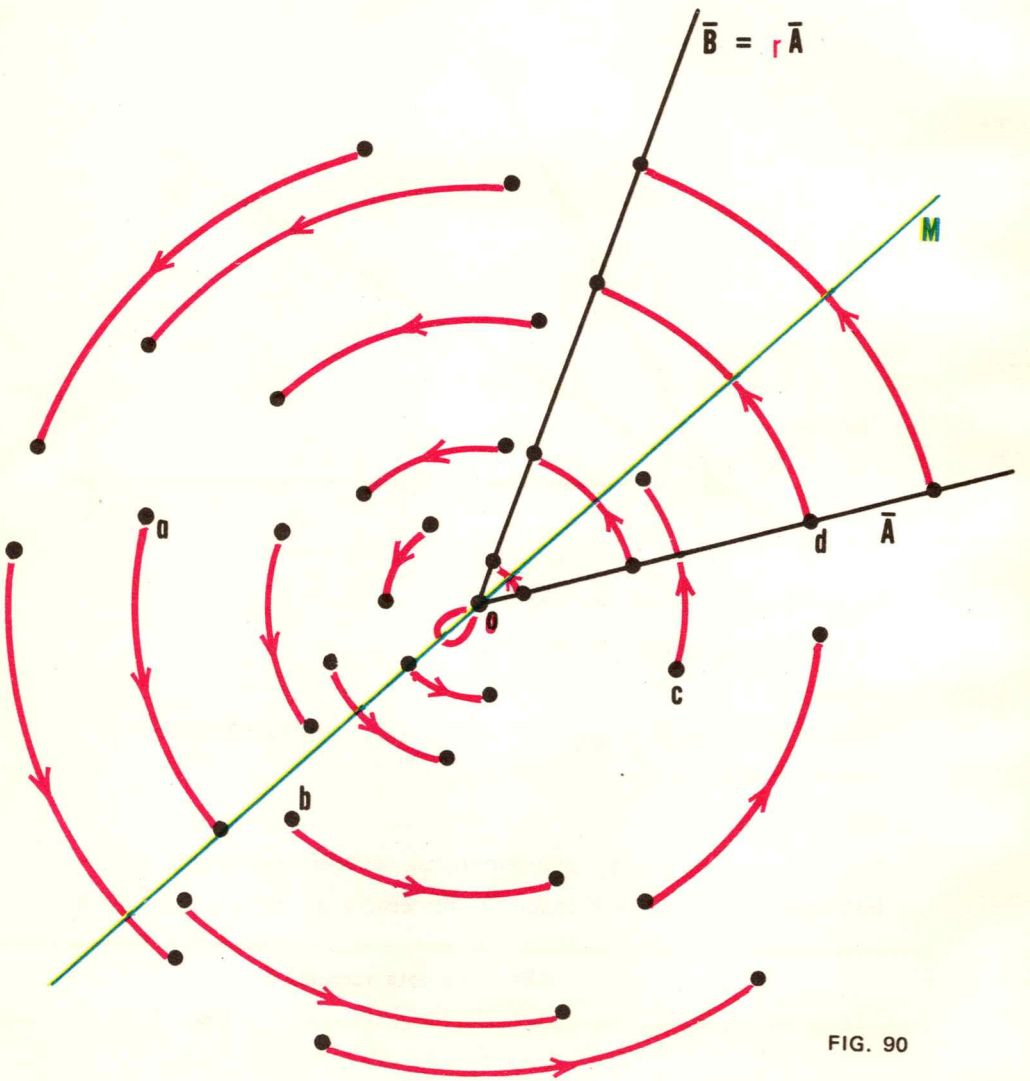


FIG. 90

El dibujo en transparente que encontrarás en un sobre al final del libro, reproduce parcialmente la figura 90.

Comprueba la fidelidad de esta reproducción.

Ubica luego el transparente sobre la figura, aplicando la semirrecta $\overline{A}$ del transparente sobre la semirrecta $\overline{B} = r\,\overline{A}$ de la figura.

Comprobarás **experimentalmente** que todo punto x del transparente está aplicado sobre su imagen rx (de la figura 90).

Este transparente nos proporciona, pues, un medio de construir la rotación que aplica $\overline{A}$ sobre $\overline{B}$ y nos revela **experimentalmente** que no existe más que una rotación que aplica $\overline{A}$ sobre $\overline{B}$

Esta información constituye el objeto del axioma $\Pi 14$ que da mayor precisión a la proposición (6 . 1).

AXIOMA $\Pi 14$

Si $\overline{A}$ **y** $\overline{B}$ **son dos semirrectas cerradas de origen o**

Entonces existe una y sólo una rotación que aplica $\overline{A}$ **sobre** $\overline{B}$

AXIOMA DE LA ROTACION

La rotación que aplica $\overline{A}$ *sobre* $\overline{B}$ *se expresa* **rot** $(\overline{A}, \overline{B})$

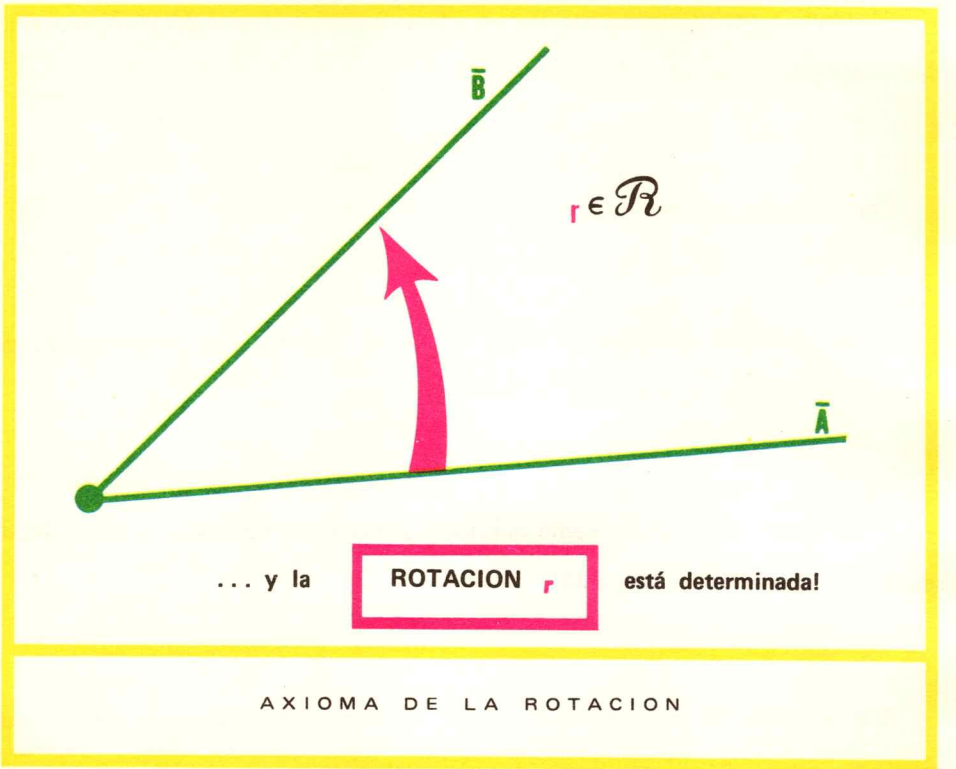


FIG. 91

Consecuencias inmediatas

a) Sabemos que 1_Π es una **rotación**

que aplica la semirrecta cerrada $\bar{A}$ sobre sí misma.

El axioma de la rotación nos permite concluir que

La transformación idéntica 1_Π
es la única rotación que aplica una semirrecta sobre sí misma.

b) He aquí una recta D y un punto o de D

Llamemos $\overline{D}_1$ y $\overline{D}_2$ a las dos semirrectas cerradas de origen o incluidas en D

Diremos que cada una de estas semirrectas es la opuesta de la otra.

La simetría central s_o aplica $\overline{D}_1$ sobre $\overline{D}_2$

La simetría central s_o es una rotación que aplica $\overline{D}_1$ sobre $\overline{D}_2$

Gracias al axioma de la rotación, podremos precisar

La simetría de centro o *es la única rotación*
que aplica una semirrecta cerrada de origen o
sobre la semirrecta cerrada opuesta.

c) **Si** M es la bisectriz de la cupla $(\overline{A}, \overline{B})$ de semirrectas cerradas de origen o

Entonces $s_M \circ s_A = s_B \circ s_M$ es LA rotación que aplica $\overline{A}$ sobre $\overline{B}$

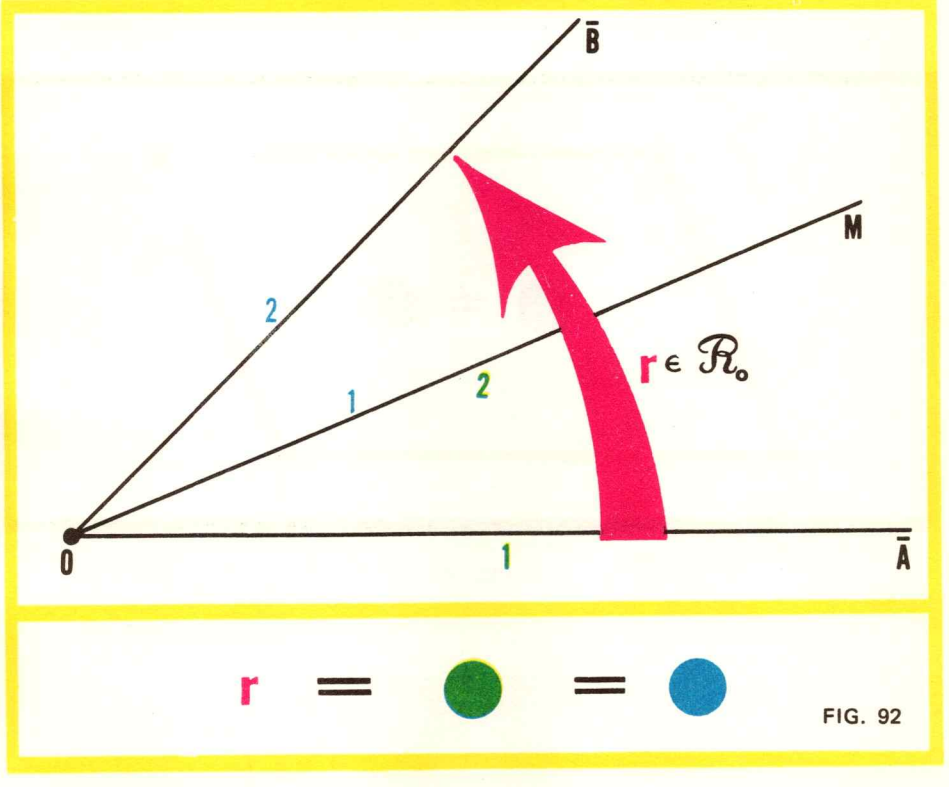


FIG. 92

3 – TEOREMA DE LAS TRES SIMETRIAS

TEOREMA

1º La compuesta de toda terna de simetrías centrales es una simetría central

2º La compuesta de toda terna de simetrías cuyos ejes tienen la misma dirección, es una simetría cuyo eje pertenece a esa misma dirección.

3º La compuesta de toda terna de simetrías cuyos ejes comprenden el punto o, es una simetría cuyo eje comprende o

El 1º del teorema repite la proposición 1 . 4

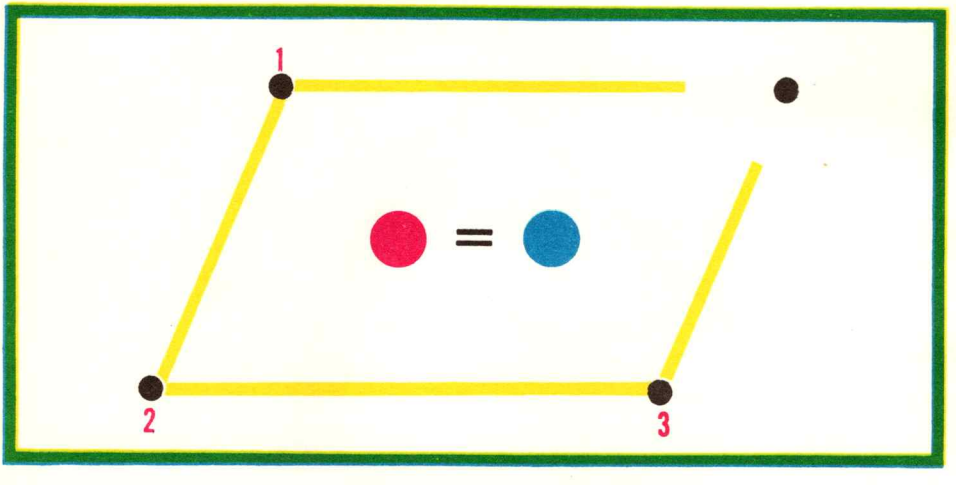


FIG. 9

DEMOSTRACION DEL 2° :

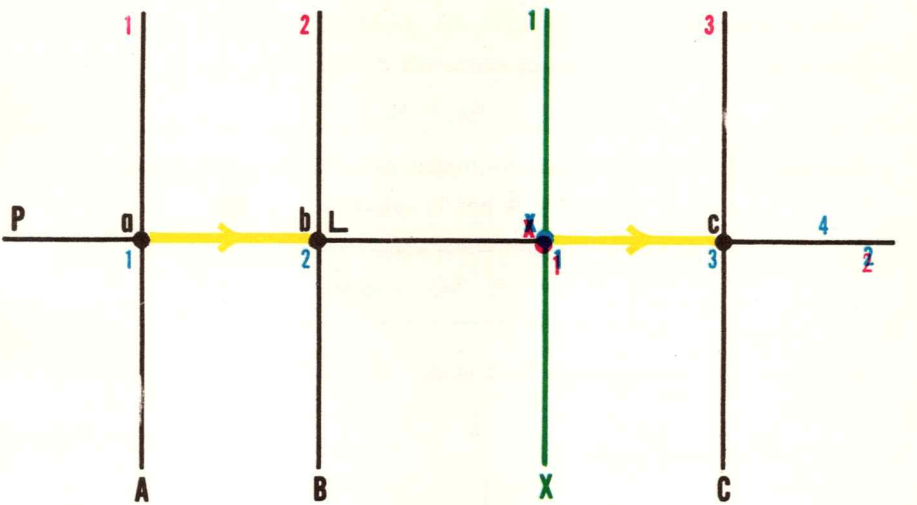


FIG. 94

$s_C \circ s_B \circ s_A$

$=$ ●

$=$ ● (puesto que $s_B \circ s_A = s_b \circ s_a$ y $s_C = s_P \circ s_c$)

$=$ ● $\left(\begin{array}{l}\text{puesto que} \quad s_c \circ s_b \circ s_a = s_x \\ \text{con} \quad x \quad \text{tal que} \quad \overrightarrow{ab} = \overrightarrow{xc}\end{array}\right)$

$=$ ● (puesto que $s_P \circ s_x = s_X$)

$= s_X$ (con $X \parallel A \parallel B \parallel C$)

Luego $\boxed{s_C \circ s_B \circ s_A = s_x}$

3º) Debemos probar que

Si $A, B, C \in \mathfrak{D}_o$

Entonces $s_C \circ s_B \circ s_A = s_X$ con $X \in \mathfrak{D}_o$

DEMOSTRACION :

Probar 3º equivale a probar la existencia de una recta $X \in \mathfrak{D}_o$ tal que

$$s_C \circ s_B = s_X \circ s_A$$

Llamemos $\overline{A}$ a una de las semirrectas cerradas de origen o incluidas en $\overline{A}$ y $\overline{A}'$ la imagen de $\overline{A}$ por la rotación $= s_C \circ s_B$

$$\overline{A}' = (s_C \circ s_B)\overline{A}$$

Anotemos X a la bisectriz de la cupla $(\overline{A}, \overline{A}')$

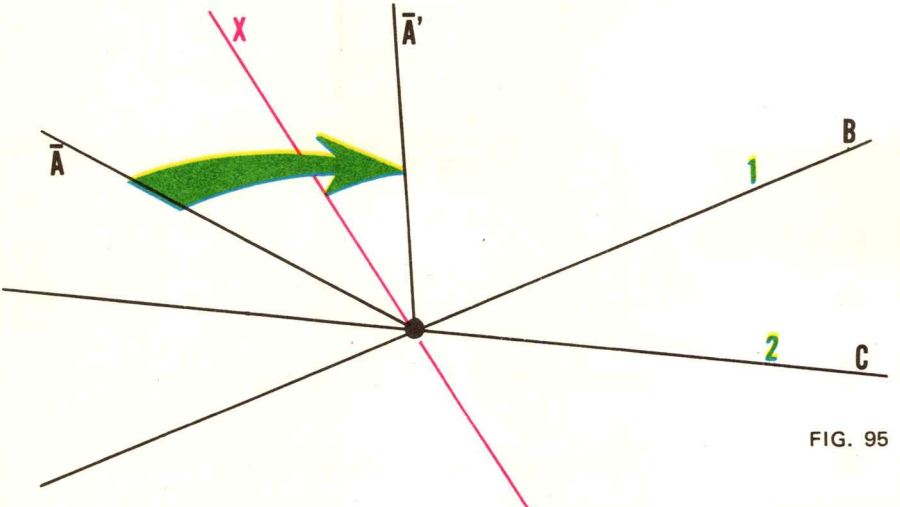


FIG. 95

$$(s_X \circ s_A)\,\overline{A} = s_X\,(s_A\,\overline{A}) = s_X\,\overline{A} = \overline{A}'$$

$$\overline{A}' = (s_X \circ s_A)\,\overline{A}$$

Así cada uno de los términos $s_C \circ s_B$ y $s_X \circ s_A$ designa una rotación que aplica $\overline{A}$ sobre $\overline{A}'$

Por lo tanto, el axioma de la rotación implica $s_C \circ s_B = s_X \circ s_A$

l.q.q.d.

4 – TRES SAMBAS

1º El teorema de las tres simetrías centrales puede enunciarse :

$$\forall\ p\ ,q\ ,r \in \Pi \quad ; \quad \exists!\ z \in \Pi \quad : \quad s_r \circ s_q \circ s_p = s_z$$

En el grupo $\mathcal{C} \cup \mathcal{T}$, o :

$$\forall\ a\ ,b\ ,c\ ,x\ ,y \in \Pi \ :$$

$$s_b \circ s_a \circ s_c = s_x \iff s_b \circ s_a = s_x \circ s_c$$

$$s_c \circ s_b \circ s_a = s_y \iff s_b \circ s_a = s_c \circ s_y$$

De donde,

SAMBA 1

$$\forall\ a\ ,b\ ,c \in \Pi \quad ; \quad \exists!\ x \in \Pi \quad ; \quad \exists!\ y \in \Pi \quad :$$

$$\mathbf{s_x \circ s_c = s_b \circ s_a = s_c \circ s_y}$$

$\forall\, a, b, c \in \Pi \;;\; \exists!\, x \in \Pi \;;\; \exists!\, y \in \Pi \;:$

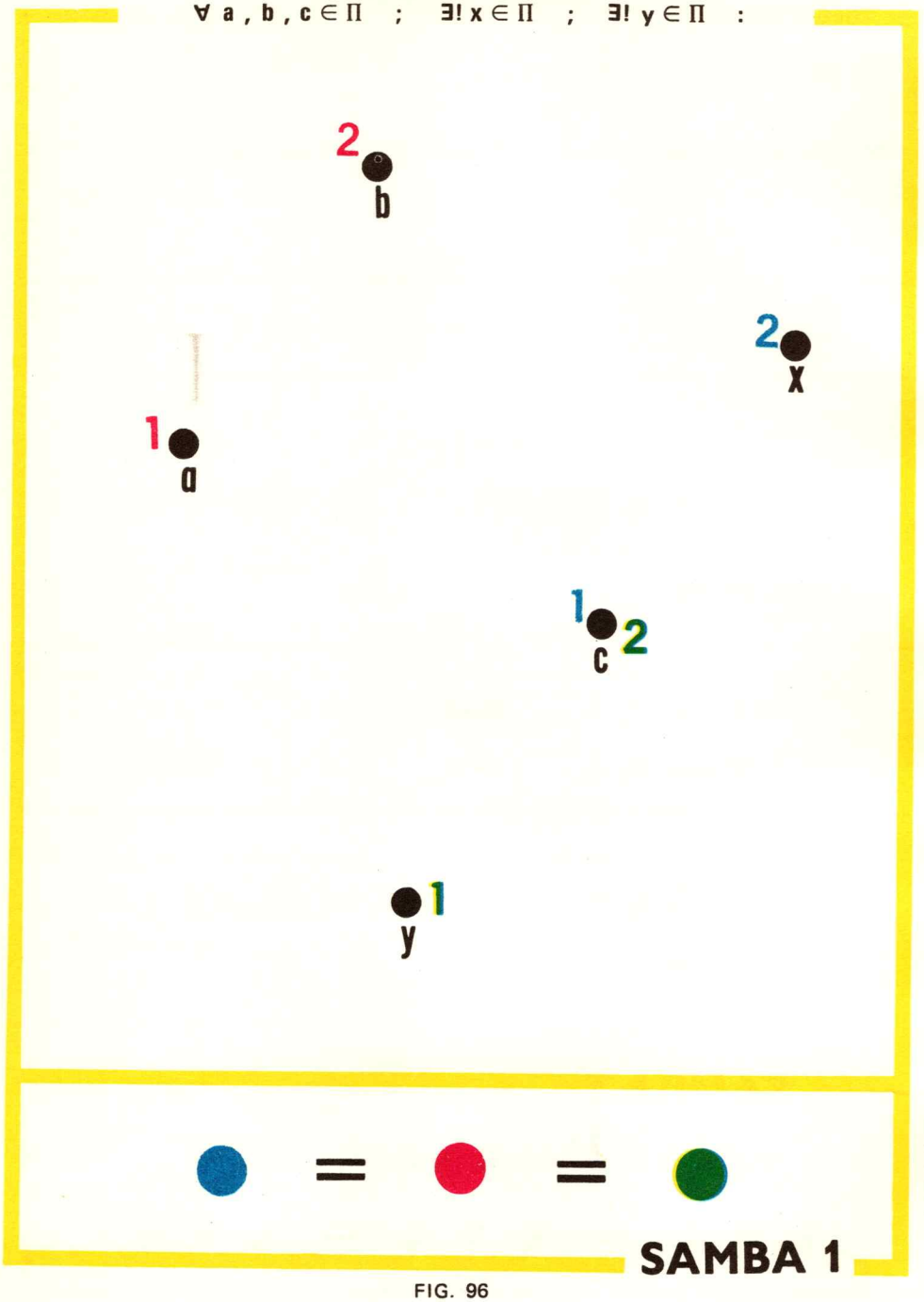


FIG. 96

Los dos últimos casos del teorema de las tres simetrías se pueden enunciar :

2º	3º
$\forall P, Q, R \in dir\ D\ ;\ \exists!\ Z \in dir\ D :$ $s_R \circ s_Q \circ s_P = s_Z$	$\forall P, Q, R \in \mathfrak{D}_o\ ;\ \exists!\ Z \in \mathfrak{D}_o :$ $s_R \circ s_Q \circ s_P = s_Z$

En el grupo $\mathfrak{I}$, o :

$\forall A, B, C, X, Y \in \mathfrak{D}$:

$$s_B \circ s_A \circ s_C = s_X \iff s_B \circ s_A = s_X \circ s_C$$

$$s_C \circ s_B \circ s_A = s_Y \iff s_B \circ s_A = s_C \circ s_Y$$

De donde,

SAMBA 2 2º	**SAMBA 3** 3º
$\forall A, B, C \in dir\ D$ $\exists!\ X \in dir\ D\ ;\ \exists!\ Y \in dir\ D\ :$	$\forall A, B, C \in \mathfrak{D}_o$ $\exists!\ X \in \mathfrak{D}_o\ ;\ \exists!\ Y \in \mathfrak{D}_o$
$s_X \circ s_C = s_B \circ s_A = s_C \circ s_Y$	

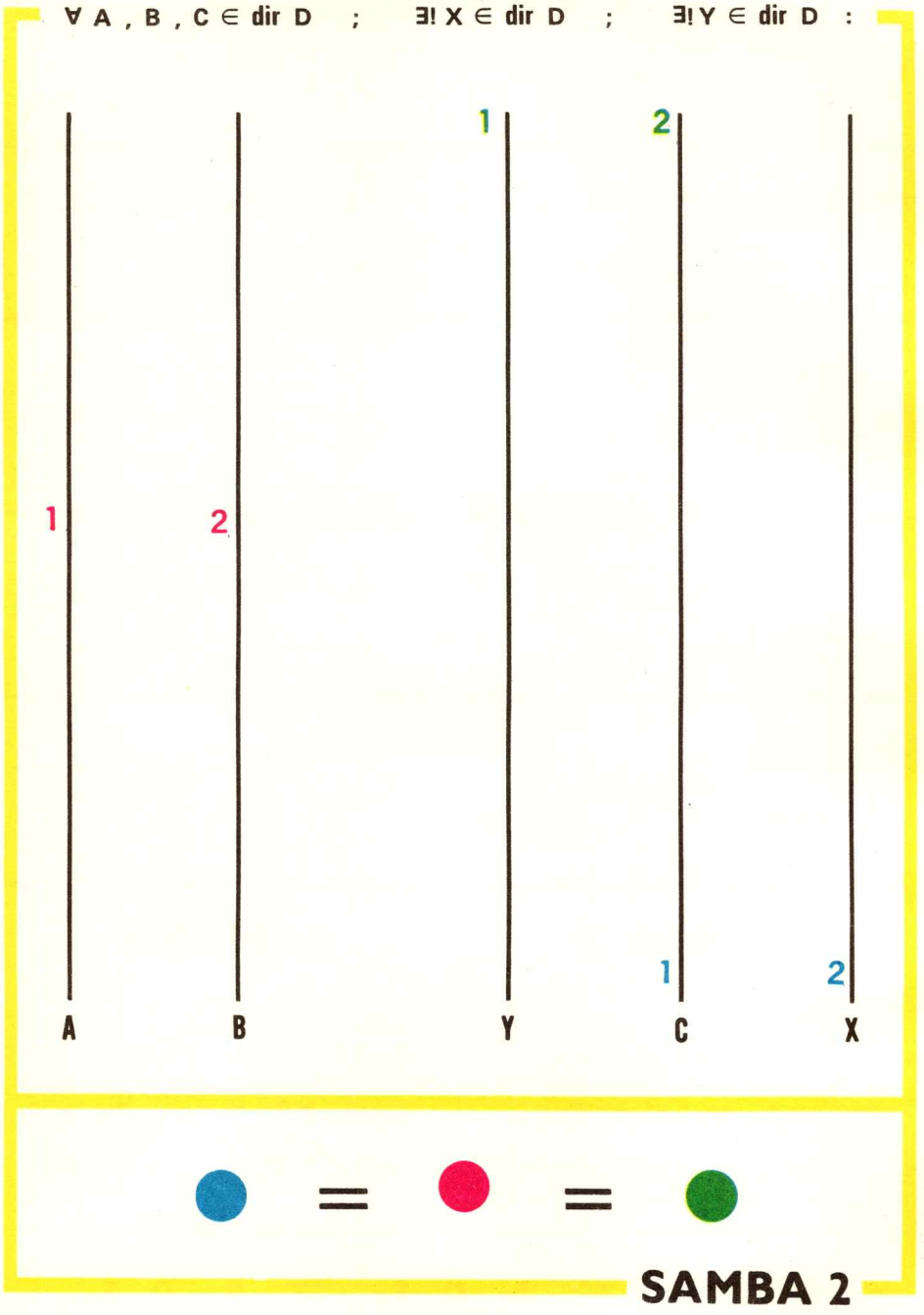
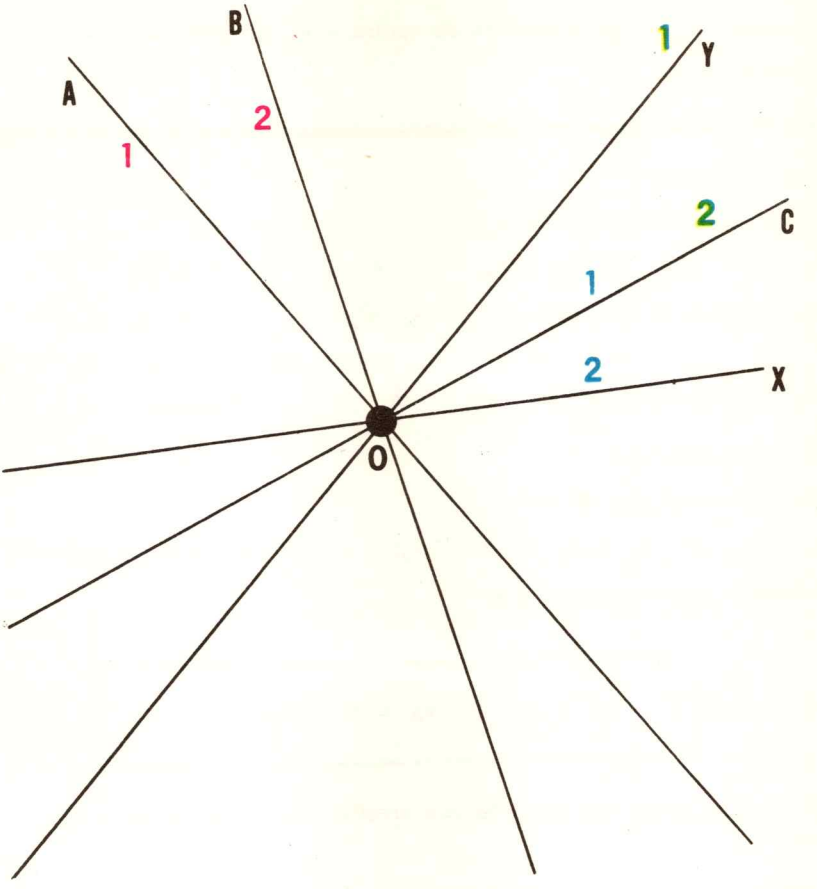


FIG. 97

$\forall A, B, C \in \mathfrak{D}_o$; $\exists! X \in \mathfrak{D}_o$; $\exists! Y \in \mathfrak{D}_o$:



SAMBA 3

FIG. 98

5 – EL GRUPO DE ROTACIONES DE CENTRO O

TEOREMA

El conjunto $\mathcal{R}_o$ de rotaciones de centro o es un grupo conmutativo para la composición.

DEMOSTRACION :

1º He aquí $r_1 , r_2 \in \mathcal{R}_o$

$r_1 = s_B \circ s_A$ con $A , B \in \mathcal{D}_o$

Por Samba 3 , existe $C \in \mathcal{D}_o$: $r_2 = s_A \circ s_C$

Luego $r_1 \circ r_2 = s_B \circ s_A \circ s_A \circ s_C = s_B \circ s_C \in \mathcal{R}_o$

Hemos probado que **Si** $r_1 , r_2 \in \mathcal{R}_o$, **Entonces** $r_1 \circ r_2 \in \mathcal{R}_o$

2º Conmutatividad

Con las notaciones de 1º :

$r_1 \circ r_2 = s_B \circ s_C$; $r_2 \circ r_1 = s_A \circ s_C \circ s_B \circ s_A$

Debemos, pues, establecer que

$$s_B \circ s_C = s_A \circ s_C \circ s_B \circ s_A$$

El teorema de las tres simetrías nos enseña que $s_C \circ s_B \circ s_A$ es una simetría.

Luego $s_C \circ s_B \circ s_A \circ s_C \circ s_B \circ s_A = 1_\Pi$

de donde $s_B \circ s_C \circ s_C \circ s_B \circ s_A \circ s_C \circ s_B \circ s_A = s_B \circ s_C$

y $s_A \circ s_C \circ s_B \circ s_A = s_B \circ s_C$

que es lo que debíamos establecer

3º $1_\Pi = s_A \circ s_A \in \mathcal{R}_o$

4º **Si** $r_1 = s_B \circ s_A \in \mathcal{R}_o$

Entonces $r_1^{-1} = s_A \circ s_B \in \mathcal{R}_o$

6 – BISECTRIZ

PROPOSICION

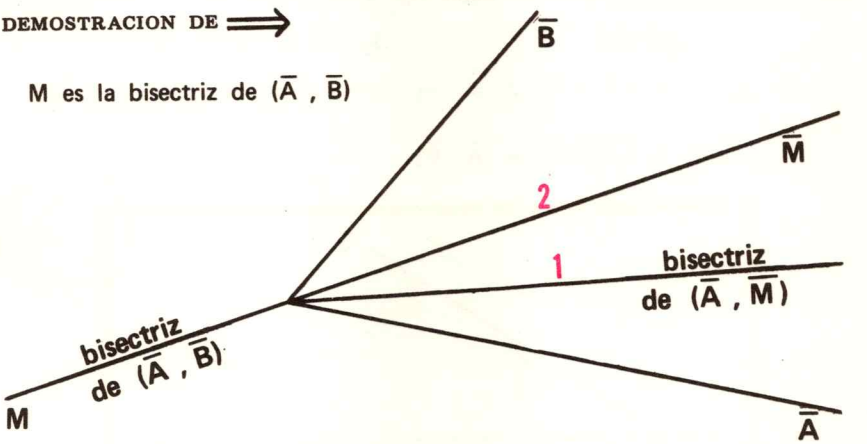
Si $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{M}$ *designan semirrectas cerradas de origen* o *y* $\underline{M}$ *es la recta que contiene a* $\overline{M}$

Entonces

M *es la bisectriz de* $(\overline{A}, \overline{B})$	$\Longleftrightarrow$	*La rotación que aplica* $\overline{A}$ *sobre* $\overline{M}$ *es igual a la rotación que aplica* $\overline{M}$ *sobre* $\overline{B}$

DEMOSTRACION DE $\Longrightarrow$

M es la bisectriz de $(\overline{A}, \overline{B})$



$r = S_2 \circ S_1 =$ ●

FIG. 99

es la rotación que aplica $\overline{A}$ sobre $\overline{M}$

$$r\,\overline{M} = (s_2 \circ s_1)\overline{M} = s_2 \,.\, s_1\,\overline{M} = s_2\,\overline{A} = \overline{B}$$

Luego r es la rotación que aplica $\overline{M}$ sobre $\overline{B}$

l.q.q.d.

DEMOSTRACION DE $\Longleftarrow$

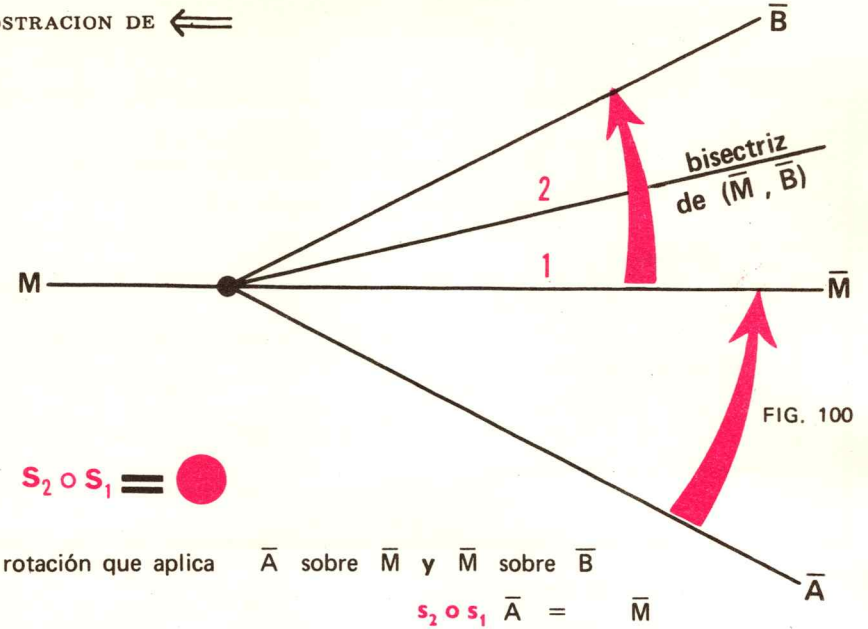


FIG. 100

es la rotación que aplica $\bar{A}$ sobre $\bar{M}$ y $\bar{M}$ sobre $\bar{B}$

$$S_2 \circ S_1 \ \bar{A} = \bar{M}$$

$$S_M \ \bar{A} = S_1 \ \bar{A} = S_2 \circ S_2 \circ S_1 \ \bar{A} = S_2 \cdot S_2 \circ S_1 \ \bar{A} = S_2 \ \bar{M} = \bar{B}$$

Por tanto M es la bisectriz de $(\bar{A}, \bar{B})$

l.q.q.d.

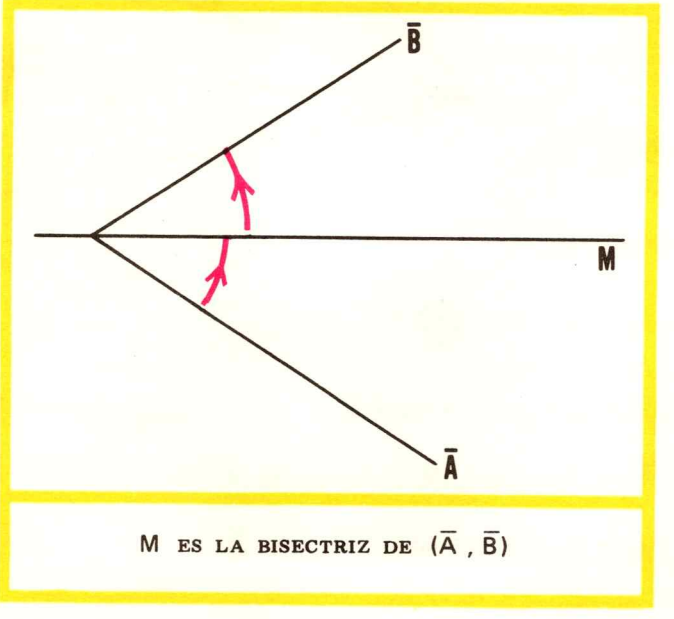


FIG. 101

7 – BISECTRIZ DE UNA CUPLA DE RECTAS DE $\mathfrak{D}_0$

He aquí $A, B \in \mathfrak{D}_0$

$\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$ son las semirrectas cerradas de origen o incluidas en A

$\overline{B}_1$, $\overline{B}_2$ son las semirrectas cerradas de origen o incluidas en B

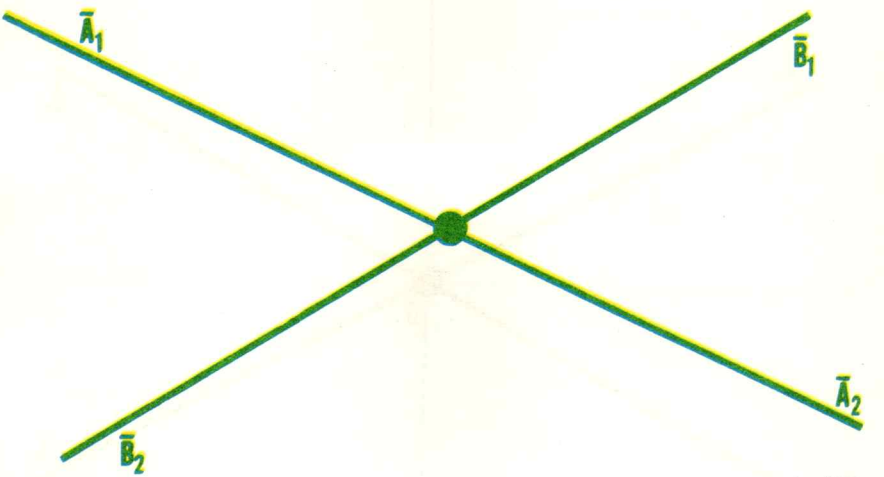


FIG. 102

Llamemos M a la bisectriz de $(\overline{A}_1 , \overline{B}_1)$

La simetría s_M aplica $\overline{A}_1$ sobre $\overline{B}_1$

A sobre B

$\overline{A}_2$ sobre $\overline{B}_2$

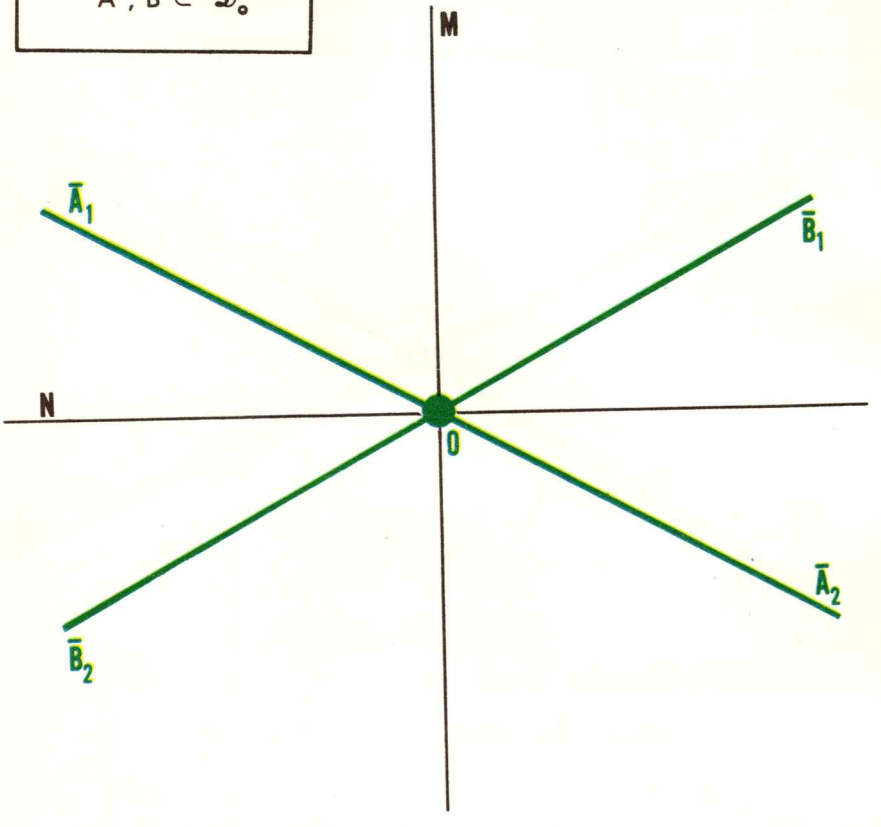
La bisectriz M de $(\overline{A}_1 , \overline{B}_1)$	=	La bisectriz de $(\overline{A}_2 , \overline{B}_2)$

Del mismo modo,

La bisectriz N de $(\overline{A}_1 , \overline{B}_2)$	=	La bisectriz de $(\overline{A}_2 , \overline{B}_1)$

DEFINICION

$A , B \in \mathfrak{D}_o$



La bisectriz M *de* $(\bar{A}_1 , \bar{B}_1)$ *y de* $(\bar{A}_2 , \bar{B}_2)$
y la bisectriz N *de* $(\bar{A}_1 , \bar{B}_2)$ *y de* $(\bar{A}_2 , \bar{B}_1)$

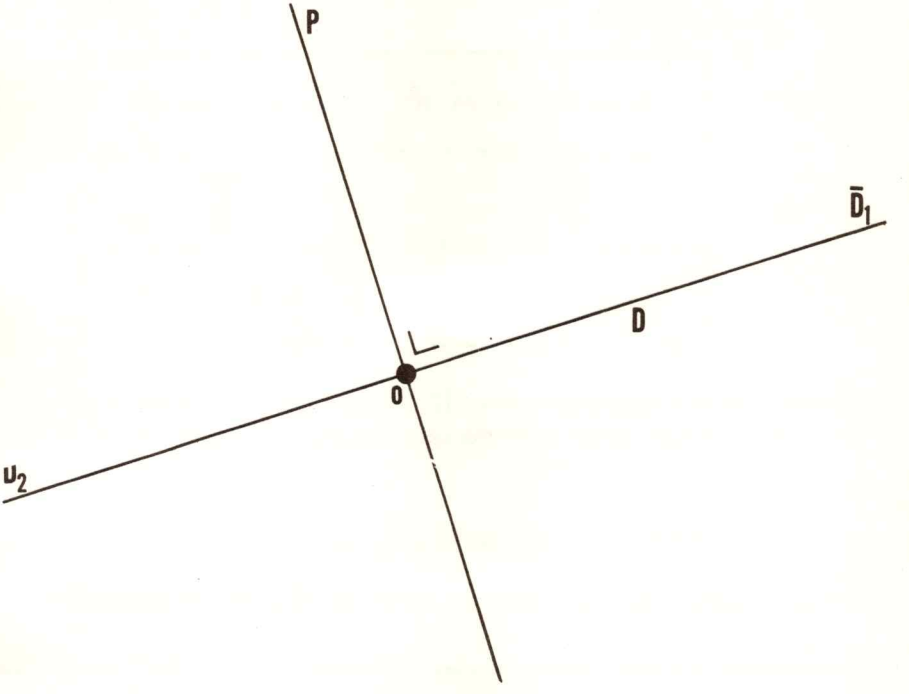
se denominan

las bisectrices (de $\mathfrak{D}_o$) de la cupla (A , B)

FIG. 103

He aquí $D \in \mathfrak{D}_o$

Construye las bisectrices de $\mathfrak{D}_o$ de la cupla (D , D)



D es la bisectriz de las cuplas $(\bar{D}_1 , , \bar{D}_1)$ y $(\bar{D}_2 , \bar{D}_2)$

P es la bisectriz de las cuplas $(\bar{D}_1 , \bar{D}_2)$ y $(\bar{D}_2 , \bar{D}_1)$

D y P son las bisectrices de $\mathfrak{D}_o$ de la cupla (D , D)

FIG. 104

OBSERVACION :

Si las rectas A , B de $\mathfrak{D}_o$ son distintas

Entonces la cupla (A , B) determina o puesto que $A \cap B = \{o\}$

y se puede hablar de bisectrices de (A , B) sin mencionar $\mathfrak{D}_o$

Esta referencia es indispensable sólo en caso que $A = B$

La definición de bisectrices puede formularse nuevamente como sigue :

DEFINICION

Si $A , B , M \in \mathfrak{D}_o$

Entonces

M es bisectriz en $\mathfrak{D}_o$ de la cupla (A , B)

$\Updownarrow$ $\Updownarrow$

$s_M A = B$ $s_M B = A$

Hemos visto que las bisectrices en $\mathfrak{D}_o$ de la cupla (D , D) son perpendiculares. Vamos a establecer que sucede lo mismo para toda cupla de rectas $A , B \in \mathfrak{D}_o$

TEOREMA

Las bisectrices de toda cupla de rectas de $\mathfrak{D}_o$ son perpendiculares.

TEOREMA DE LAS BISECTRICES

DEMOSTRACION :

(Ver la figura 103)

La simetría s_M aplica $\overline{A}_1$ sobre $\overline{B}_1$

La simetría s_N aplica $\overline{B}_1$ sobre $\overline{A}_2$

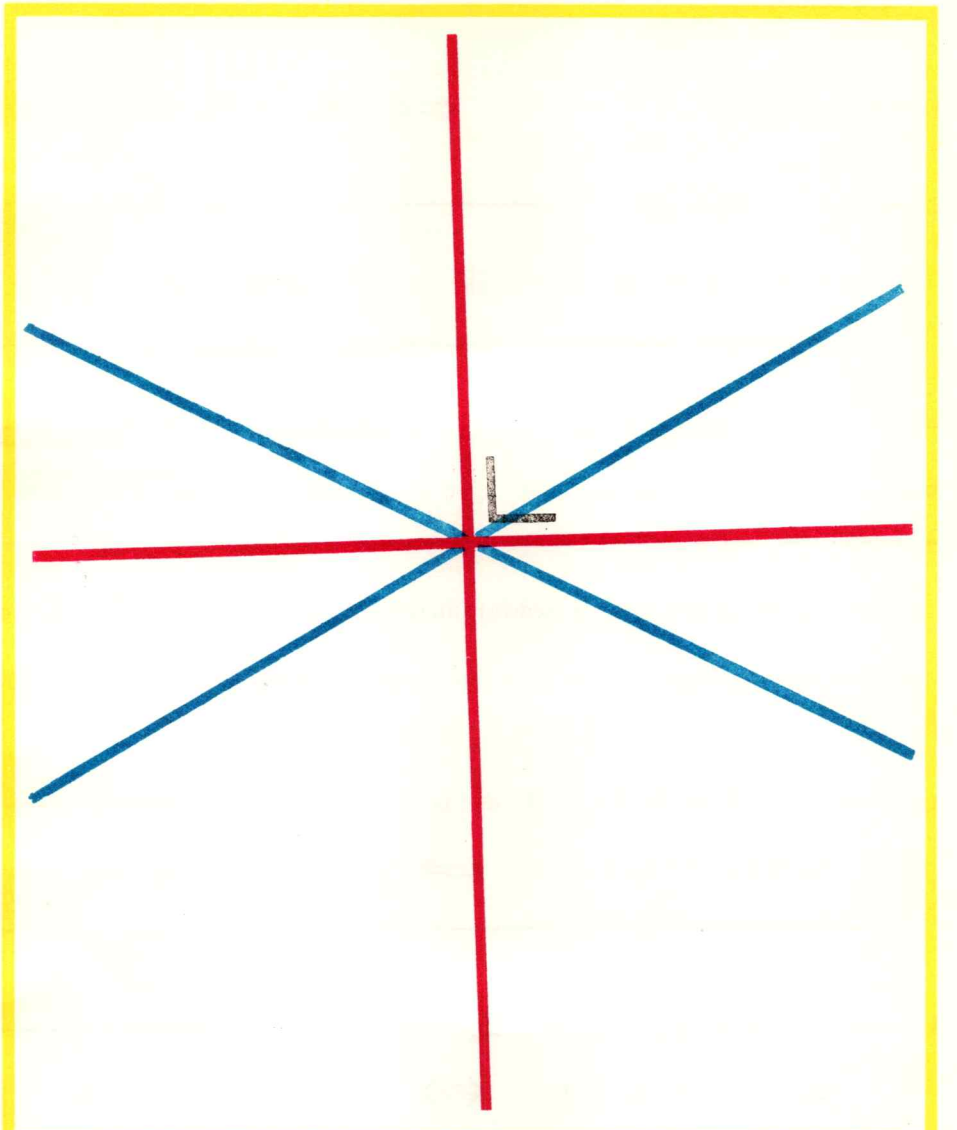
La rotación s_N o s_M aplica $\overline{A}_1$ sobre la semirrecta opuesta $\overline{A}_2$

La simetría s_o es la única rotación que aplica $\overline{A}_1$ sobre $\overline{A}_2$ (§ 2)

De donde s_N o $s_M = s_o$

$N \perp M$ (criterio de perpendicularidad, 4 . 5)

l.q.q.d.



BISECTRICES

FIG. 105

8 – EJERCICIOS

1. $\forall\, a, b \in \Pi \quad : \quad a \neq b \iff \mathcal{R}_a \cap \mathcal{R}_b = \{1_\Pi\}$

2. Sabes que

$$\forall\, a, b, c, d \in \Pi \quad : \quad \overrightarrow{ab} = \overrightarrow{cd} \iff \overrightarrow{ac} = \overrightarrow{bd}$$

Cruzamiento

Se deduce un nuevo teorema de cruzamiento

$$\forall\, a, b, c, d \in \Pi : s_b \circ s_a = s_d \circ s_c \iff s_c \circ s_a = s_d \circ s_b$$

¿Quieres establecer este teorema mediante un simple cálculo en el grupo $\mathcal{C} \cup \mathcal{T}$, o

¿Quieres demostrar este teorema solamente a partir del teorema de las tres simetrías centrales?

3. $\forall$ A, B, C, D $\in$ *dir* D :

$$s_B \circ s_A = s_D \circ s_C \iff s_C \circ s_A = s_D \circ s_B$$

Cruzamiento

4. $\forall$ A, B, C, D $\in \mathcal{D}_o$:

$$s_B \circ s_A = s_D \circ s_C \iff s_C \circ s_A = s_D \circ s_B$$

Cruzamiento

5. $\mathcal{R}_o$ es un subgrupo de $\mathcal{I}$, o

6. $\{1_\Pi, s_o\}$ es un subgrupo de $\mathcal{R}_o$, o

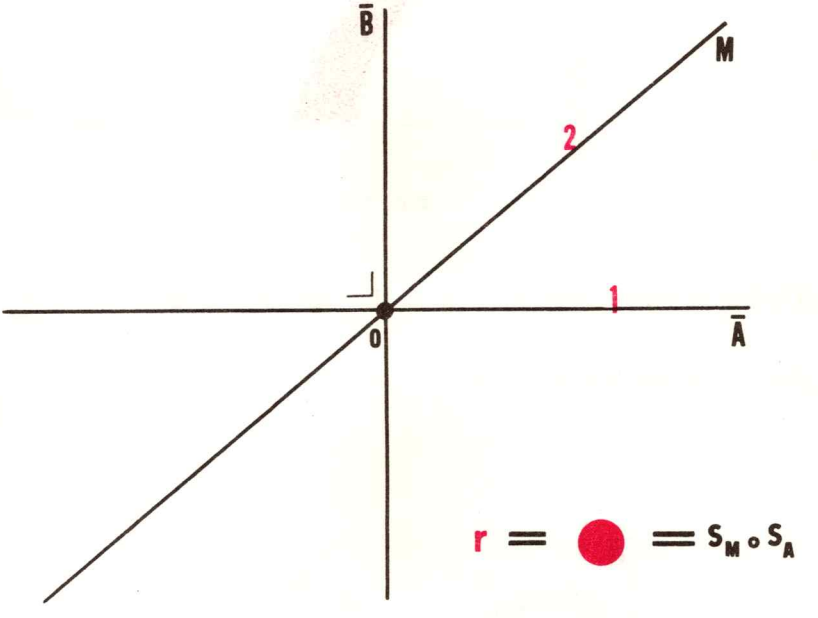
7. **Si** $\overline{A}$ es una semirrecta cerrada de origen o incluida en la recta A
$\overline{B}$ es una semirrecta cerrada de origen o incluida en la recta B
M es la bisectriz de $(\overline{A}, \overline{B})$

Entonces $s_M \circ s_A = s_B \circ s_M$

$(s_M \circ s_A)^2 = (s_B \circ s_M)^2 = s_B \circ s_A$

8. Toda rotación posee al menos una raíz cuadrada.

9.



$\overline{A}$, $\overline{B}$, semirrectas cerradas de origen o,
incluidas en las rectas perpendiculares A y B
M es la bisectriz de $(\overline{A}, \overline{B})$

FIG. 106

Establece que $r^2 = s_o$, $r^4 = 1_\Pi$

Deduce que $\{ 1_\Pi , r , r^2 , r^3 \}$ es un subgrupo de $\mathcal{R}_o$, o

10. ¿Cuál es el subgrupo de $\mathcal{R}_o$ engendrado por el **cuarto de vuelta** q?

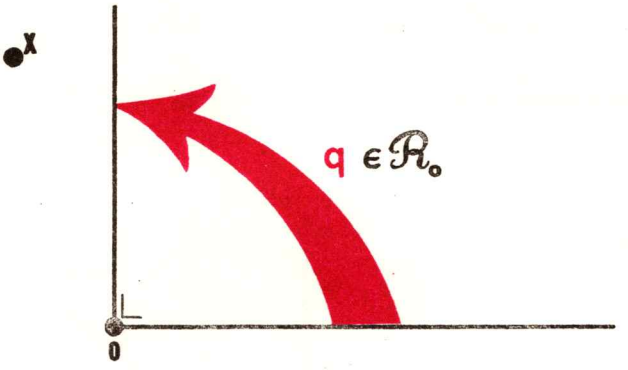


FIG. 107

¿Cuál es el menor conjunto $E \subset \Pi$ tal que $x \in E = q\,E$?

11. ¿Cuál es menor conjunto E tal que $P \subset E = r\,E$?

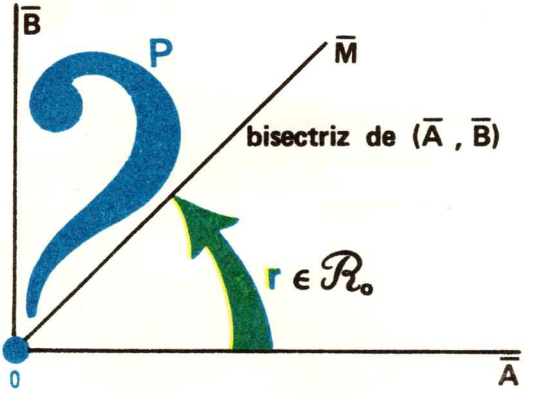


FIG. 108

12. Si $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, $\overline{D}$ designan semirrectas cerradas de origen o

Entonces $rot\ (\overline{A}\ ,\ \overline{B}) = rot\ (\overline{C}\ ,\ \overline{D})$

ssi

$(\overline{A}\ ,\ \overline{D})$ y $(\overline{B}\ ,\ \overline{C})$ tienen la misma bisectriz

(Es consecuencia de § 6)

13. Simple juego de escritura : permuta $\overline{B}$ y $\overline{C}$ en el ejercicio precedente. Deduce :

$rot\ (\overline{A}\ ,\ \overline{B}) = rot\ (\overline{C}\ ,\ \overline{D})$

ssi

$(\overline{A}\ ,\ \overline{D})$ y $(\overline{B}\ ,\ \overline{C})$ tienen la misma bisectriz

ssi

$rot\ (\overline{A}\ ,\ \overline{C}) = rot\ (\overline{B}\ ,\ \overline{D})$

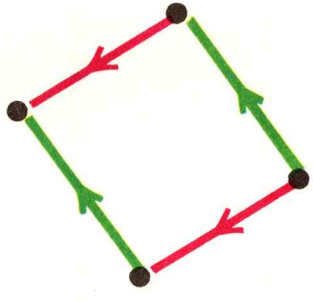
Deducir de ello el teorema del cruzamiento para las rotaciones

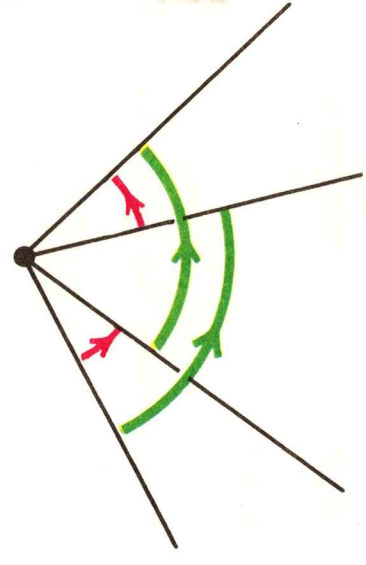
14. ¿Hay proposición análoga a la dada en el ejercicio 12, para las traslaciones?

TRASLACIONES

ROTACIONES

ANALOGIA





ssi

FIG. 109

7

Grupos de los desplazamientos

¿Cuál es la compuesta de una cupla de desplazamientos?

Todo desplazamiento es una traslación o una rotación.
De donde surgen estas cuatro preguntas :

1º *¿Cuál es la compuesta de una cupla de traslaciones?*

2º *¿Cuál es la compuesta de una cupla de rotaciones?*

3º *¿Cuál es la compuesta* **t** o **r** *de la rotación* **r** *y de la traslación* **t***?*

4º *¿Cuál es la compuesta* **r** o **t** *de la traslación* **t** *y de la rotación* **r***?*

1 – COMPUESTA DE UNA CUPLA DE TRASLACIONES

Sabemos hace tiempo que $\mathcal{T}$, o es un grupo.

La compuesta de una cupla de traslaciones es una traslación,

es decir, $\mathcal{T} \circ \mathcal{T} \subset \mathcal{T}$

Como $1_\Pi \in \mathcal{T}$, tendremos

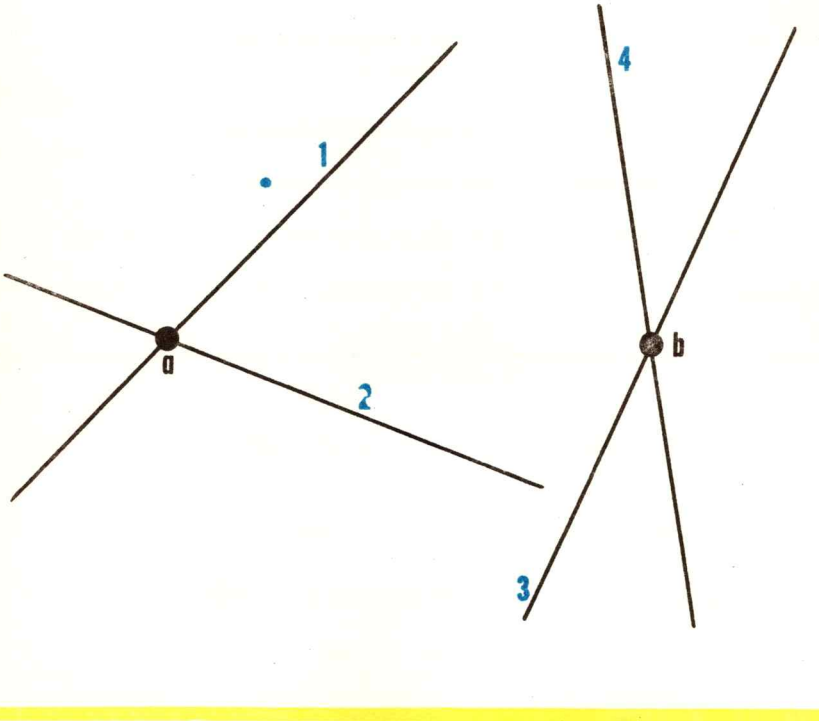
$$\mathcal{T} \circ \mathcal{T} = \mathcal{T}$$

2 – COMPUESTA DE UNA CUPLA DE ROTACIONES

Si las rotaciones consideradas tienen un mismo centro,

Entonces sabemos por el teorema 6 . 5 que la compuesta es una rotación.

Supongamos que tengan centros distintos *a* y *b*



es la compuesta de las rotaciones de centros a y b

FIG. 110

Por Samba 3 :

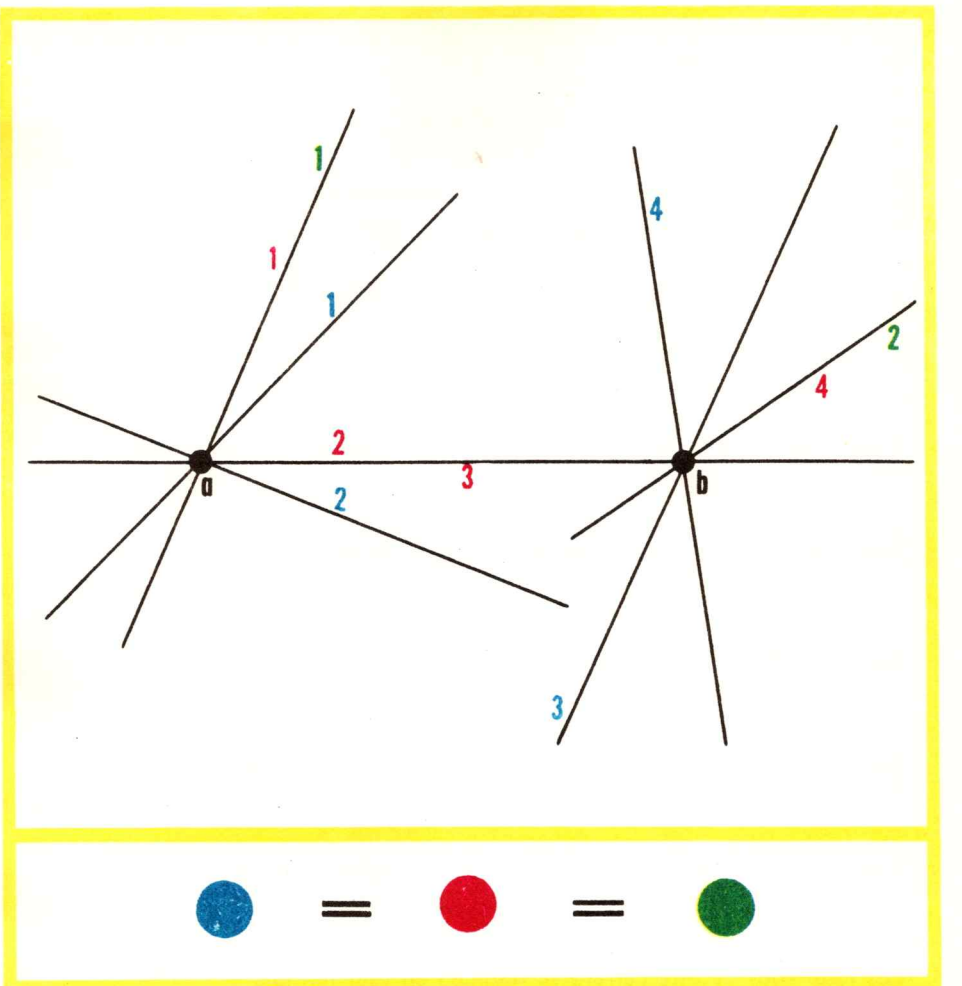


FIG. 111

La compuesta de la cupla de rotaciones iguales

la compuesta de una cupla de simetrías, es decir, un desplazamiento.

Acabamos de establecer que *la compuesta de toda cupla de rotaciones es un desplazamiento.*

O dicho de otra manera,

$$\mathcal{R} \circ \mathcal{R} \subset \mathcal{T}^+$$

Toda rotación es la compuesta de la rotación idéntica consigo misma.

Toda rotación es la compuesta de una cupla de rotaciones.

Toda translación es la compuesta de una cupla de simetrías centrales.

Toda translación es la compuesta de una cupla de rotaciones.

Todo desplazamiento es la compuesta de una cupla de rotaciones.

Los resultados de este párrafo se resumen en esta fórmula

$$\mathcal{R} \circ \mathcal{R} = \mathcal{T}^+$$

3 – COMPUESTA DE UNA ROTACION Y DE UNA TRASLACION

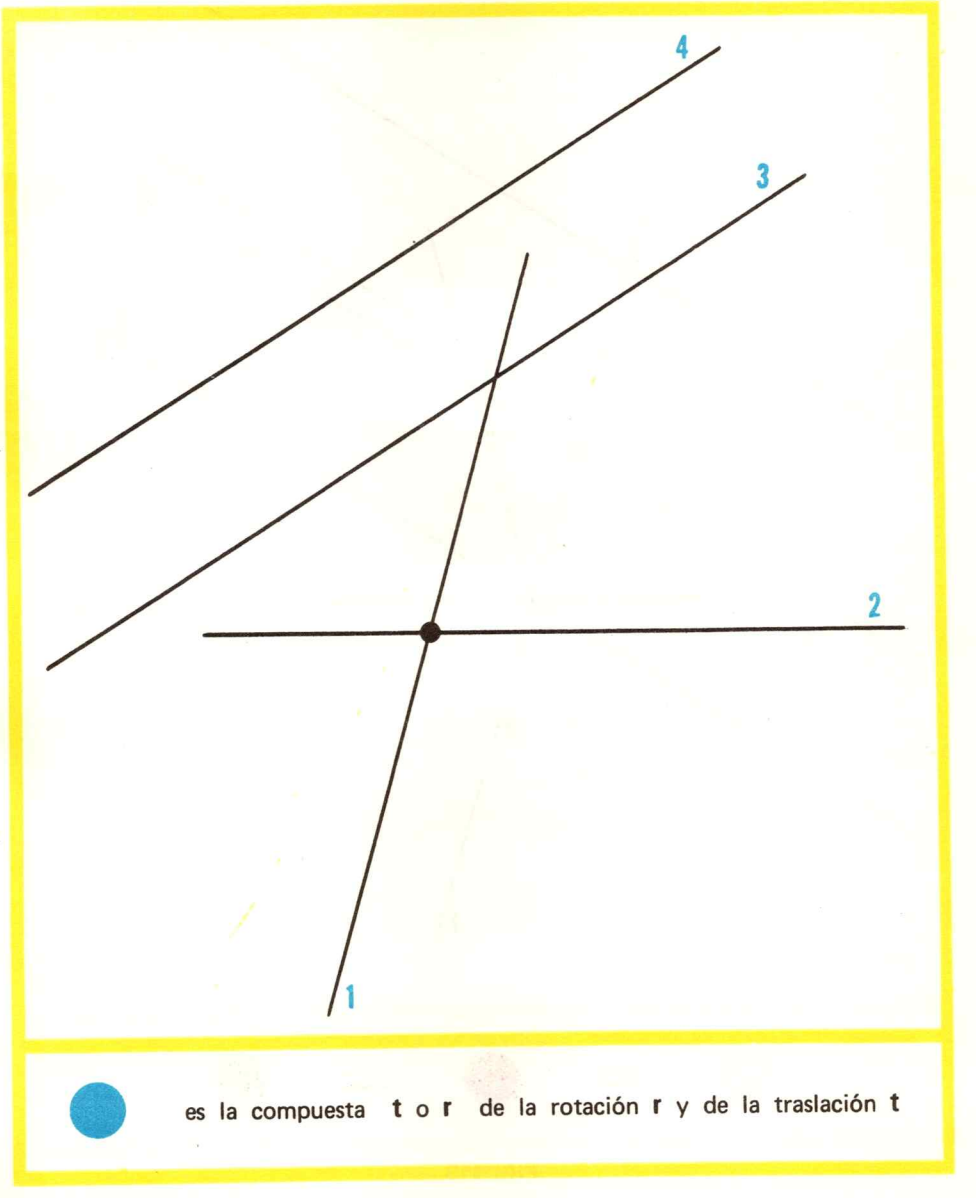


FIG. 112

Por Sambas 2 y 3 :

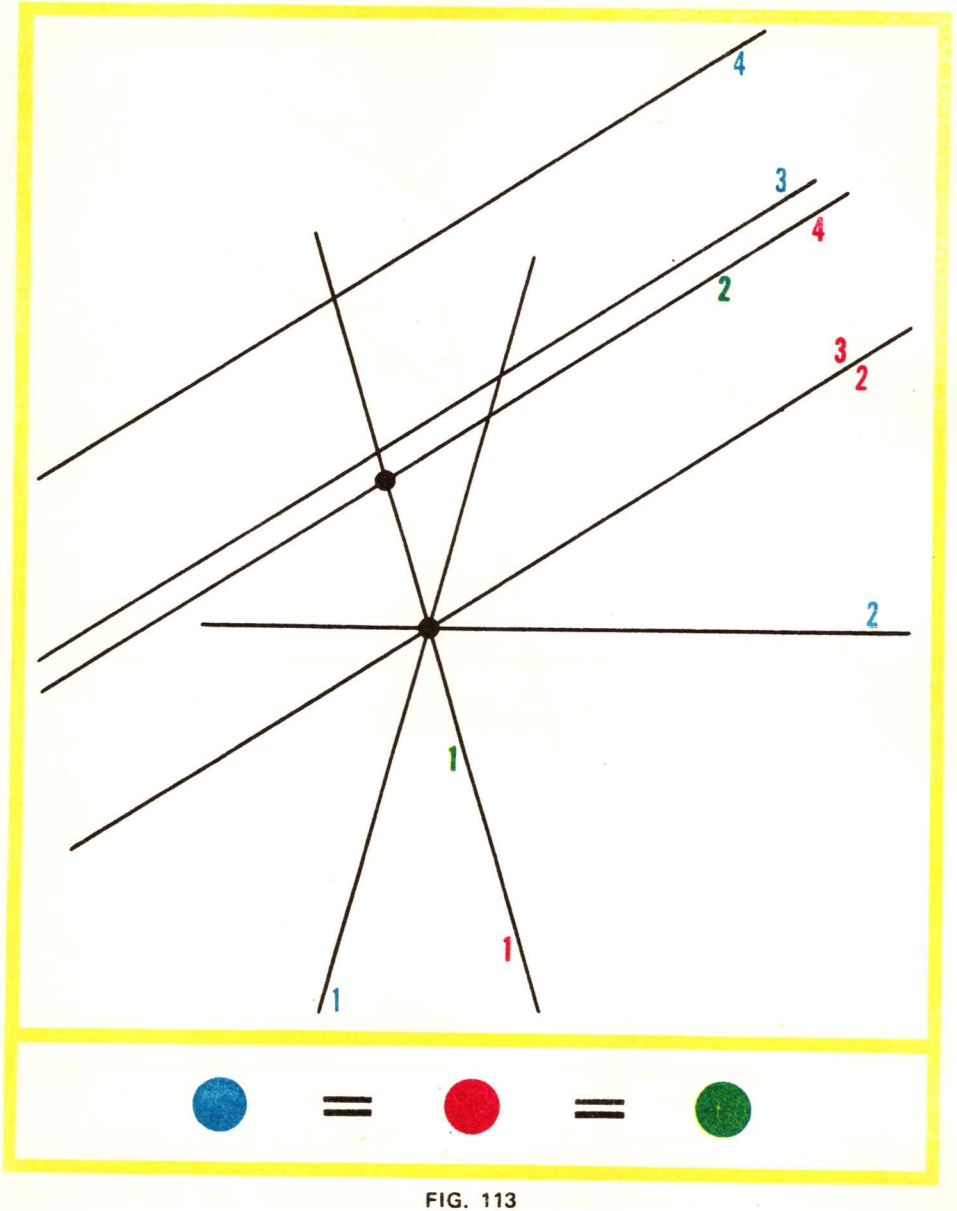


FIG. 113

La compuesta de la rotación **r** y de la traslación **t** es igual a la compuesta de una cupla de simetrías, es decir un desplazamiento.

Hemos establecido, pues, que

la compuesta de una rotación y de una traslación es un desplazamiento.

O lo que es lo mismo, $\mathfrak{T} \circ \mathfrak{R} \subset \mathfrak{I}^+$

Toda traslación es la compuesta de la rotación idéntica con dicha traslación

$$\mathfrak{T} \subset \mathfrak{T} \circ \mathfrak{R}$$

Toda rotación es la compuesta de dicha rotación con la traslación idéntica.

$$\mathfrak{R} \subset \mathfrak{T} \circ \mathfrak{R}$$

$$\mathfrak{I}^+ = \mathfrak{T} \cup \mathfrak{R}$$

$$\mathfrak{I}^+ = \mathfrak{T} \cup \mathfrak{R} \subset \mathfrak{T} \circ \mathfrak{R} \subset \mathfrak{I}^+$$

Los resultados del párrafo se resumen en esta fórmula

$$\mathfrak{T} \circ \mathfrak{R} = \mathfrak{I}^+$$

4 – COMPUESTA DE UNA TRASLACION Y DE UNA ROTACION

El lector deberá probar en forma análoga que la compuesta de una traslación y de una rotación es un desplazamiento, y de manera más precisa que

$$\mathfrak{R} \circ \mathfrak{T} = \mathfrak{I}^+$$

5 – COMPUESTA DE UNA CUPLA DE DESPLAZAMIENTOS

Ahora nos será fácil dar respuesta a lo que preguntábamos al iniciar el capítulo.

La compuesta de toda cupla de desplazamientos es un desplazamiento,

es decir,

$$\mathfrak{I}^+ \circ \mathfrak{I}^+ = \mathfrak{I}^+$$

6 – EL GRUPO DE LOS DESPLAZAMIENTOS

PROPOSICION – *La transformación idéntica* 1_Π *es el único desplazamiento que aplica la semirrecta cerrada* $\overline{A}$ *sobre sí misma.*

Ya sabemos que

1_Π es la única rotación que aplica $\overline{A}$ sobre $\overline{A}$ (6 . 2)

Faltaría probar que :

1_Π es la única traslación que aplica $\overline{A}$ sobre $\overline{A}$

DEMOSTRACION :

He aquí una traslación t que aplica la semirrecta cerrada $\overline{A}$ de origen o sobre $\overline{A}$

Toda isometría f aplica la semirrecta $[ab$ sobre $[f(a), f(b)$

Toda isometría que aplica $\overline{A}$ sobre $\overline{A}$

aplica por lo mismo o sobre o

La traslación t aplica o sobre o , de donde $t = \overrightarrow{oo} = 1_\Pi$

l.q.q.d.

TEOREMA

El conjunto de los desplazamientos es un grupo para la composición.

Además, para toda cupla $(\overline{A}, \overline{B})$ de semirrectas cerradas existe uno y sólo un desplazamiento que aplica $\overline{A}$ sobre $\overline{B}$

1°

$\mathfrak{I}^+$, o es un grupo

DEMOSTRACION :

a) **Si** $d_1, d_2 \in \mathfrak{I}^+$, **Entonces** d_2 , o $d_1 \in \mathfrak{I}^+$ (§ 5)

b) $1_\Pi = s_A \text{ o } s_A \in \mathfrak{I}^+$ (para toda $A \in \mathfrak{D}$)

c) **Si** $d \in \mathfrak{I}^+$

Entonces $d = s_B \text{ o } s_A$ (con $A, B \in \mathfrak{D}$)

$d^{-1} = s_A^{-1} \text{ o } s_B^{-1}$

Por tanto $d^{-1} = s_A \text{ o } s_B \in \mathfrak{I}^+$

l.q.q.d.

2º

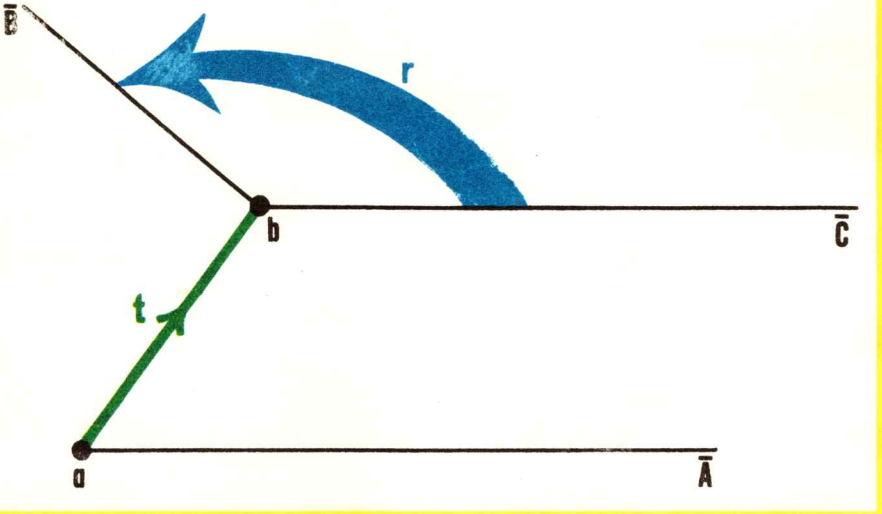
Existe un desplazamiento que aplica $\overline{A}$ *sobre* $\overline{B}$

DEMOSTRACION :

Llamemos *a* , *b* a los orígenes de $\overline{A}$, $\overline{B}$

La traslación $t=\overrightarrow{ab}$ aplica $\overline{A}$ sobre la semirrecta cerrada $\overline{C}$ de origen *b*

En virtud del axioma de la rotación, existe una sola rotación que aplica $\overline{C}$ sobre $\overline{B}$: llamémosla *r*



El **desplazamiento** **r o t** *aplica* $\overline{A}$ *sobre* $\overline{B}$

FIG. 114

l.q.q.d.

3º

Existe **un sólo** *desplazamiento que aplica* $\overline{A}$ *sobre* $\overline{B}$

DEMOSTRACION :

Si $d_1 , d_2 \in \mathfrak{J}^+$ y $d_1\,\overline{A} = \overline{B} = d_2\,\overline{A}$

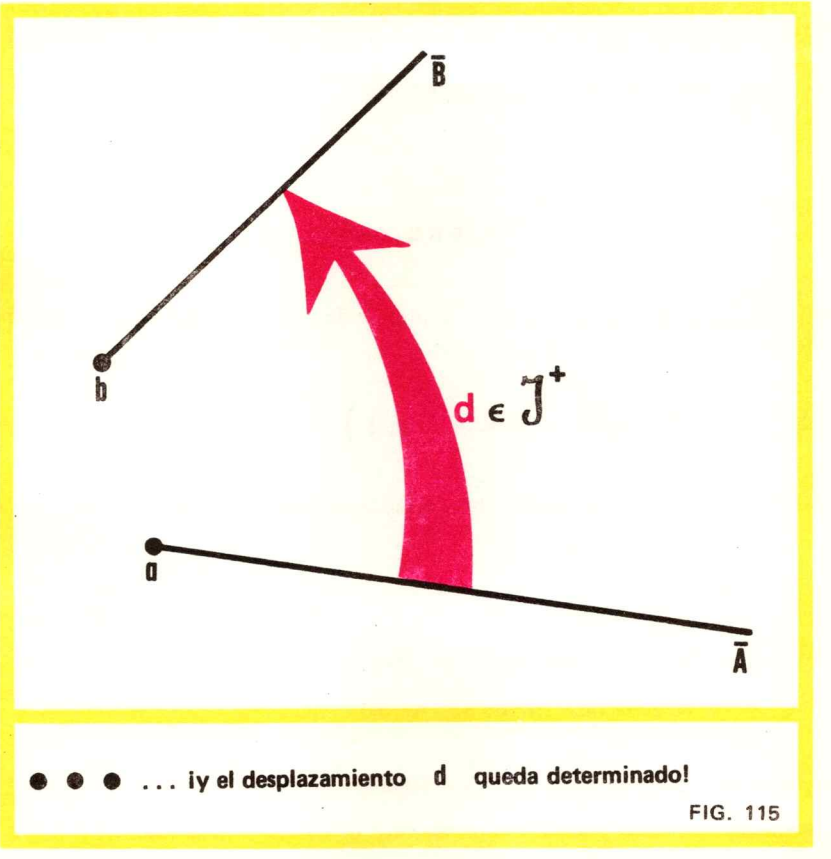
Entonces d_2^{-1} o $d_1 \in \mathfrak{J}^+$ y $(d_2^{-1}$ o $d_1)\,\overline{A} = \overline{A}$

El desplazamiento d_2^{-1} o d_1 aplica $\overline{A}$ sobre $\overline{A}$

En virtud de la proposición del § 6 : d_2^{-1} o $d_1 = 1_\Pi$

de donde se deduce que $d_1 = d_2$

lo que completa la demostración del **teorema.**



● ● ● ... ¡y el desplazamiento d queda determinado!

FIG. 115

A veces es cómodo anotar

$desp\ (\overline{A}\ ,\ \overline{B})$

al desplazamiento que aplica la semirrecta cerrada $\overline{A}$ sobre $\overline{B}$

Si $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$ designan semirrectas cerradas,

Entonces $desp\ (\overline{B}\ ,\ \overline{C})\ o\ desp\ (\overline{A}\ ,\ \overline{B}) = desp\ (\overline{A}\ ,\ \overline{C})$

$desp\ (\overline{A}\ ,\ \overline{A}) = 1_\Pi$

$\left(desp\ (\overline{A}\ ,\ \overline{B})\right)^{-1} = desp\ (\overline{B}\ ,\ \overline{A})$

Existe una y solo una cupla de semirrectas $(\overline{X}\ ,\ \overline{Y})$ tales que

$desp\ (\overline{C}\ ,\ \overline{X}) = desp\ (\overline{A}\ ,\ \overline{B}) = desp\ (\overline{Y}\ ,\ \overline{C})$

EJERCICIOS

1. La compuesta de una rotación no idéntica y de una traslación, es una rotación no idéntica.

2. $\left(\mathcal{R} \setminus \{1_\Pi\}\right) o\ \mathcal{T} = \left(\mathcal{R} \setminus \{1_\Pi\}\right)$

3. **Si** $\overline{A}$ y $\overline{B}$ son semirrectas cerradas de origen a y b distintas

$t = \overrightarrow{ab}$

$\overline{C} = t\overline{A} \qquad \overline{D} = t^{-1}\overline{B}$

M es la mediatriz de $(a\ ,\ b)$

N es la bisectriz de $(s_M\overline{A}\ ,\ \overline{B})$

$r_1 = desp(t\overline{A}\ ,\ \overline{B}) \quad ; \quad r_2 = desp\ (\overline{A}\ ,\ t^{-1}\overline{B})$

Entonces $r_1\ o\ t = t\ o\ r_2 = s_N\ o\ s_M = desp\ (\overline{A}\ ,\ \overline{B})$

7 – CLASIFICACION DE ISOMETRIAS

Toda isometría es la compuesta de un número par o de un número impar de simetrías.

Toda compuesta de un número par de simetrías es un desplazamiento

En efecto,

$$f = s_{2n} \circ s_{2n-1} \circ s_{2n-2} \circ \ldots \circ s_5 \circ s_4 \circ s_3 \circ s_2 \circ s_1$$

$$= (s_{2n} \circ s_{2n-1}) (\circ s_{2n-2} \circ) s_{2n-3} \circ \ldots \circ (s_4 \circ s_3) \circ (s_2 \circ s_1)$$

$$= d_n \circ d_{n-1} \circ \ldots \circ d_2 \circ d_1$$

Los $d_1, \ldots, d_n$ pertenecen al grupo $\mathfrak{I}^+$, o

Por tanto $f = d_n \circ \ldots \circ d_1 \in \mathfrak{I}^+$

Toda compuesta de un número impar de simetrías es la compuesta de una terna de simetrías.

En efecto,

$$f = s_{2n+1} \circ s_{2n} \circ \ldots \circ s_1$$

$$= s_{2n+1} \circ (s_{2n} \circ \ldots \circ s_1)$$

$$f = s_{2n+1} \circ d$$

donde $d \in \mathfrak{I}^+$ (y $d = 1_\Pi$ cuando $n = 0$)

El desplazamiento d es la compuesta de una cupla (s', s'') de simetrías.

Por tanto $f = s_{2n+1} \circ s'' \circ s' \in$ o o

Toda isometría es la compuesta de una cupla o de una terna de simetrías.

Lo que equivale a, $(\mathcal{S} \circ \mathcal{S}) \cup (\mathcal{S} \circ \mathcal{S} \circ \mathcal{S}) = \mathcal{J}$

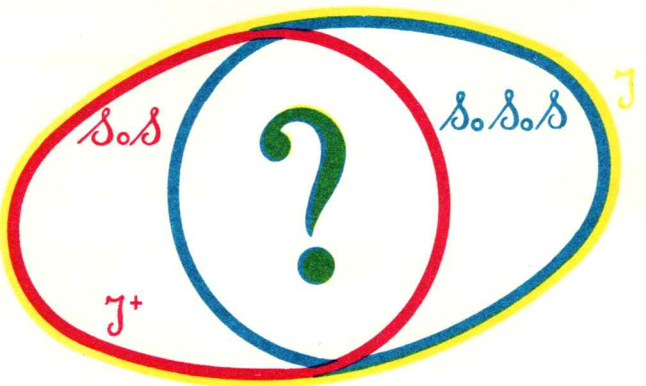


FIG. 116

$(\mathcal{S} \circ \mathcal{S}) \cap (\mathcal{S} \circ \mathcal{S} \circ \mathcal{S}) = \phi$

En efecto, $s_2 \circ s_1 = s_5 \circ s_4 \circ s_3$

lo que implicaría $s_5 = s_2 \circ s_1 \circ s_3 \circ s_4$

$s_5 \in \mathcal{J}^+$ lo que es absurdo (5 . 5)

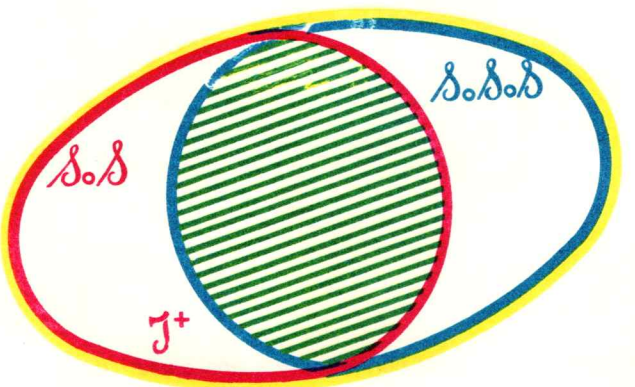


FIG. 117

Es decir, $\{ \mathcal{S} \circ \mathcal{S} , \mathcal{S} \circ \mathcal{S} \circ \mathcal{S} \}$ es una partición de $\mathcal{J}$

DEFINICION — $\mathcal{I}^-$ = $\mathcal{S} \circ \mathcal{S} \circ \mathcal{S}$ *es el conjunto de* **rebatimientos.**

El capítulo 8 estudia los rebatimientos.

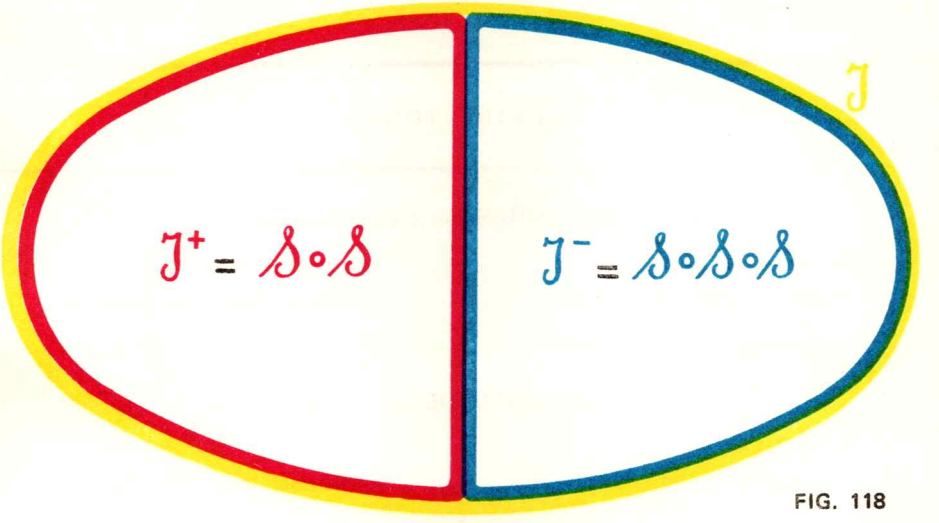


FIG. 118

LA PARTICION $\{ \mathcal{I}^+, \mathcal{I}^- \}$ DE $\mathcal{I}$

Apliquemos sobre esta figura alguno de los resultados anteriores.

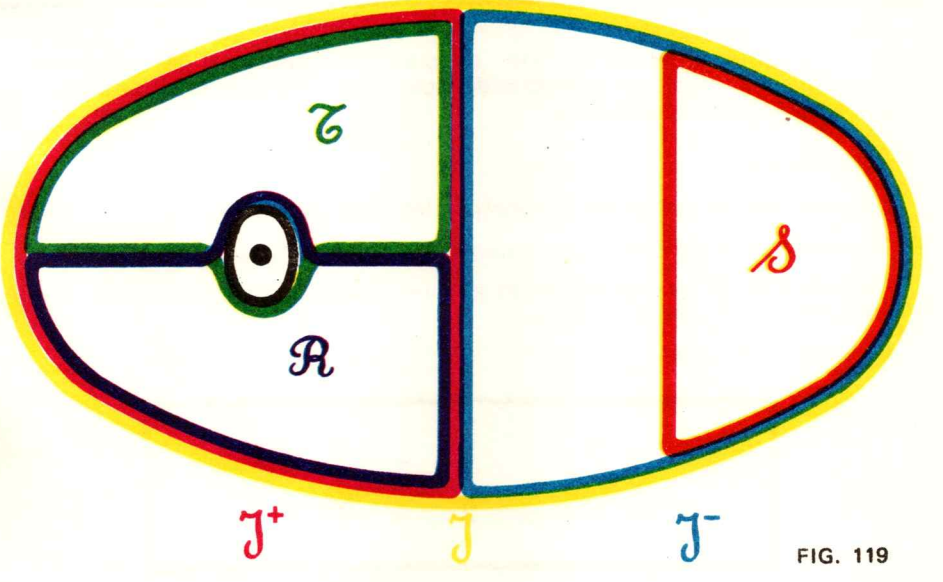


FIG. 119

8 – DESPLAZAMIENTOS Y REBATIMIENTOS

Los resultados del parágrafo precedente implican la equivalencia de estos dos sistemas de definiciones.

DEFINICIONES	
Las ISOMETRIAS *son compuestas de*	
cuplas *y* **ternas** *de simetrías*	**sucesiones finitas** *de simetrías*
Los DESPLAZAMIENTOS son compuestas de	
cuplas *de simetrías*	**sucesiones pares** *de simetrías*
Los REBATIMIENTOS son compuestas de	
ternas *de simetrías*	**sucesiones impares** *de simetrías*

El segundo sistema de definiciones es preferible porque él se generaliza sin modificación en el estudio de isometrías de espacios de dimensión superior a dos. Supone, además, inmediatamente la

PROPOSICION

La compuesta de toda cupla de desplazamientos es un desplazamiento.

La compuesta de toda cupla de rebatimientos es un desplazamiento.

La compuesta de un desplazamiento y de un rebatimiento (o de un rebatimiento y un desplazamiento) es un rebatimiento.

De manera más precisa,

$$\mathfrak{I}^+ \circ \mathfrak{I}^+ = \mathfrak{I}^+ = \mathfrak{I}^- \circ \mathfrak{I}^-$$

$$\mathfrak{I}^+ \circ \mathfrak{I}^- = \mathfrak{I}^- = \mathfrak{I}^- \circ \mathfrak{I}^+$$

EJERCICIOS

1. Hemos utilizado antes implícitamente la definición :

   La sucesión de objetos $t_1, \ldots, t_n$ es par o impar según el natural n sea par o impar.

2. $\mathfrak{J}^+ = \mathfrak{s} \circ \mathfrak{s}$

   $= \mathfrak{s} \circ \mathfrak{s} \circ \mathfrak{s} \circ \mathfrak{s}$

   $= \mathfrak{s} \circ \mathfrak{s} \circ \mathfrak{s} \circ \mathfrak{s} \circ \mathfrak{s} \circ \mathfrak{s} = \text{etc...}$

3. $\mathfrak{J}^- = \mathfrak{s} \circ \mathfrak{s} \circ \mathfrak{s}$

   $= \mathfrak{s} \circ \mathfrak{s} \circ \mathfrak{s} \circ \mathfrak{s} \circ \mathfrak{s} = \text{etc...}$

4. **Si** los s_i y los s'_j designan simetrías,

   Entonces $s_n \circ \ldots \circ s_1 = s'_m \circ \ldots \circ s'_1 \Longrightarrow 2 \mid (m + n)$

5. $\forall s \in \mathfrak{s} : \mathfrak{J}^+ \to \mathfrak{J}^- : f \to s \circ f$ es una biyección.

6. Las notaciones $\mathfrak{J}^+$ et $\mathfrak{J}^-$ ¿están elegidas con astucia?

7. El conjunto $\{+, -\}$ provisto de la ley $\bullet$ definida por

$\bullet$	$+$	$-$
$+$	$+$	$-$
$-$	$-$	$+$

   es un grupo conmutativo

8. $\mathfrak{J}^-$ es una parte generatriz de $\mathfrak{J}$, o

9.

$\circ$	$\mathfrak{J}^+$	$\mathfrak{J}^-$
$\mathfrak{J}^+$	$\mathfrak{J}^+$	$\mathfrak{J}^-$
$\mathfrak{J}^-$	$\mathfrak{J}^-$	$\mathfrak{J}^+$

10. $\{\mathfrak{J}^+, \mathfrak{J}^-\}$, o es un grupo isomorfo de $\{+, -\}$, $\bullet$

8

Rebatimientos

1 – ISOMETRIAS

Hace tiempo que conocemos los dos primeros pisos $\mathcal{J}$ y $\mathcal{S}$ o $\mathcal{S}$ del edificio de isometrías.

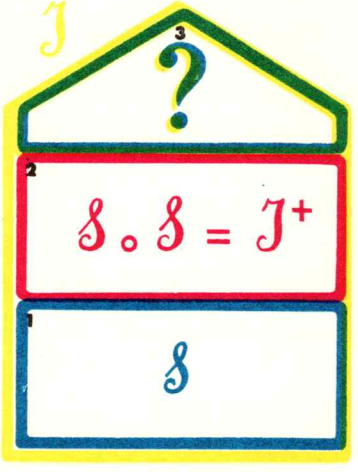


FIG. 120

$$\begin{aligned} & \mathcal{J} \setminus (\mathcal{S} \cup \mathcal{S} \circ \mathcal{S}) \\ = & (\mathcal{J} \setminus \mathcal{S} \circ \mathcal{S}) \setminus \mathcal{S} \\ = & (\mathcal{J} \setminus \mathcal{J}^+) \setminus \mathcal{S} \\ = & \quad \mathcal{J}^- \quad \setminus \mathcal{S} \\ = & (\mathcal{S} \circ \mathcal{S} \circ \mathcal{S}) \setminus \mathcal{S} \end{aligned}$$

De donde

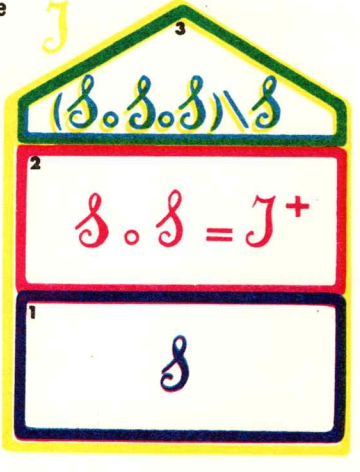


FIG. 121

¿El tercer piso está habitado?

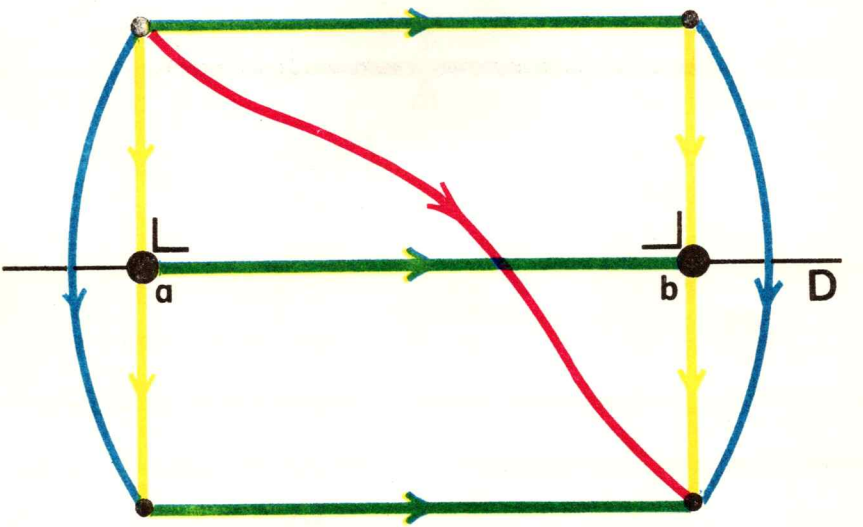
O expresado de otro modo :

¿Existen rebatimientos que no sean simetrías?

2 – SIMETRIAS DESLIZADAS

Si la traslación t es paralela a la recta D

Entonces



t , s_D

FIG. 122

$$t \circ s_D = s_D \circ t$$

DEFINICION

Se llama **simetría deslizada** *a la compuesta de una simetría y de una traslación paralela al eje de esta simetría.*

EJEMPLOS

1. La transformación idéntica 1_Π es paralela a toda recta D
   Por lo tanto toda simetría es una simetría deslizada... (que no se desliza).

2. Toda simetría deslizada es un rebatimiento.

3. La recíproca de la simetría deslizada (fig. 122)

$$\rho = t \circ s_D = s_D \circ t$$

es la simetría deslizada

$$\rho^{-1} = s_D \circ t^{-1} = t^{-1} \circ s_D$$

4. *La simetría de la figura 122 se representa también*

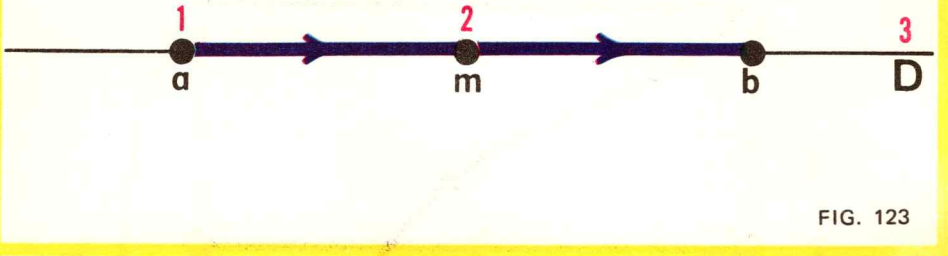
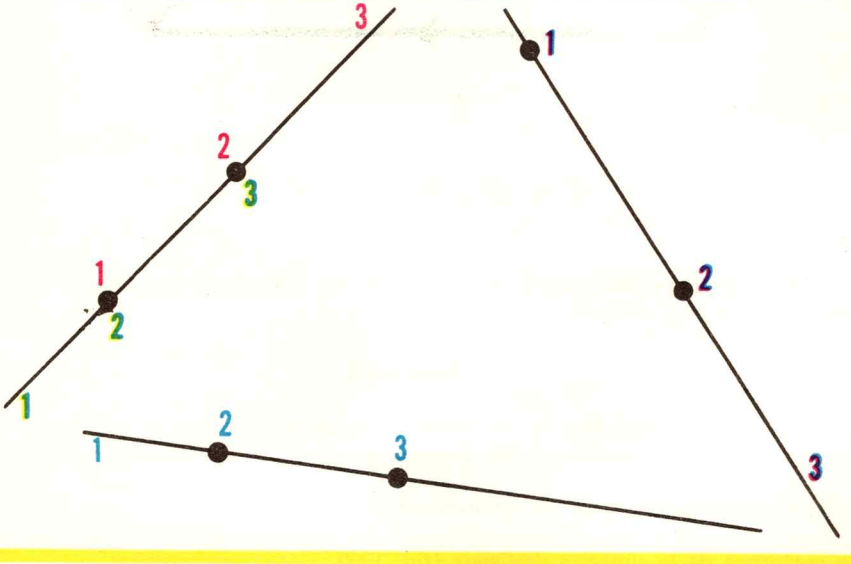


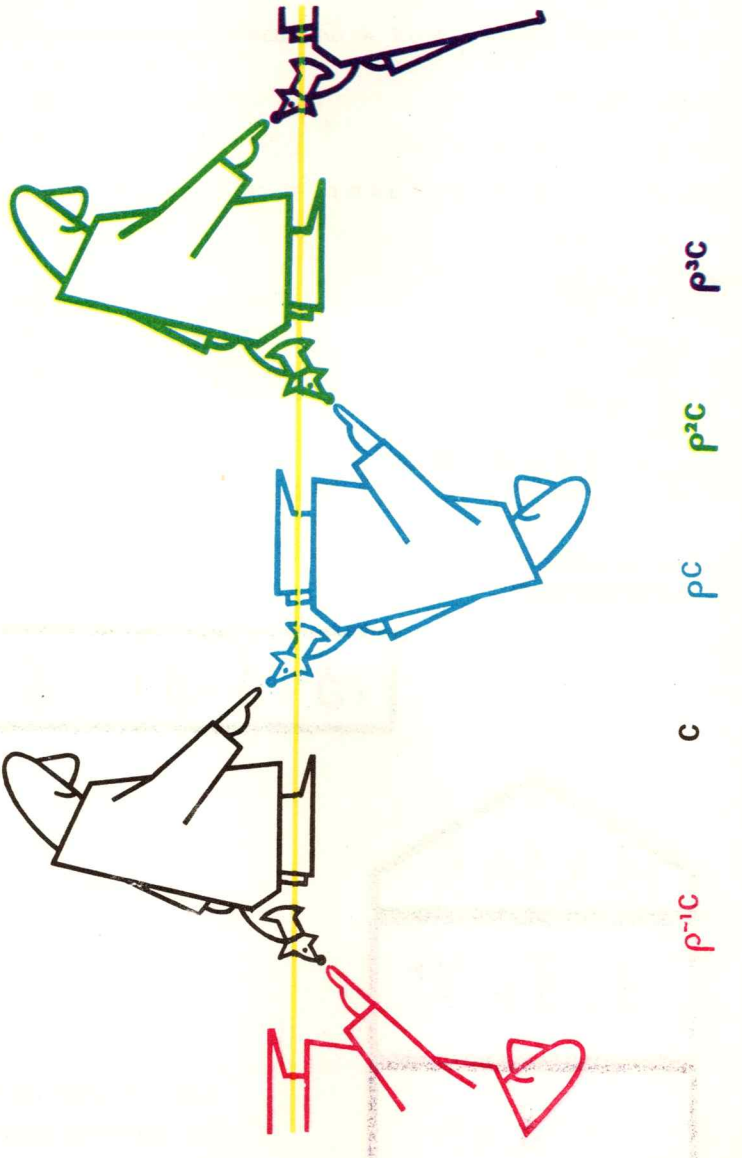
FIG. 123

5.



SON SIMETRIAS DESLIZADAS

FIG. 124



SIMETRIA DESLIZADA ρ

FIG. 125

PROPOSICION

1° **Si** *la traslación* **t** *es paralela al eje de la simetría* **s**

Entonces *el cuadrado de la* **simetría deslizada** s o t es igual *al cuadrado de la traslación* t

2° Si $t \neq 1_\Pi$

Entonces *la simetría deslizada* **s o t** *es un rebatimiento que no es una simetría.*

DEMOSTRACION :

1° Tomemos $\rho = s\,o\,t = t\,o\,s$

De donde $\rho^2 = \rho\,o\,\rho = t\,o\,s\,o\,s\,o\,t = t^2$

2° **Si** $t \neq 1_\Pi$

Entonces $t^2 \neq 1_\Pi$

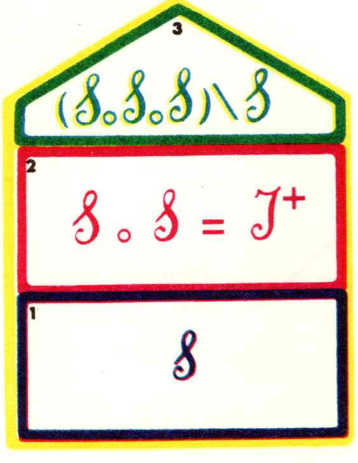
$(s\,o\,t)^2 \neq 1_\Pi$

$s\,o\,t \notin \mathcal{S}$

$s\,o\,t \in (\mathcal{S}\,o\,\mathcal{S}\,o\,\mathcal{S}) \setminus \mathcal{S}$ l.q.q.d.

¡El tercer piso del edificio
de isometrías está habitado!

$$(\mathcal{S}\,o\,\mathcal{S}\,o\,\mathcal{S}) \setminus \mathcal{S} \neq \emptyset$$



Los tres pisos del edificio
de isometrías están habitados.

FIG. 126

PROPOSICION

Toda simetría deslizada es, de manera única, la compuesta de una simetría y de una traslación paralela al eje de la simetría.

DEMOSTRACION :

He aquí la simetría deslizada $\rho = s \circ t = t \circ s$

en la que la *traslación* t es paralela al eje de la *simetría* s

$$\rho^2 = t^2$$

Entonces ρ determina ρ^2 determina t^2 determina t determina t^{-1}

Por tanto ρ determina $\rho \circ t^{-1} = s \circ t \circ t^{-1} = s$ l.q.q.d.

DEFINICION

Si *la traslación* **t** *es paralela al eje de la simetría* **s**

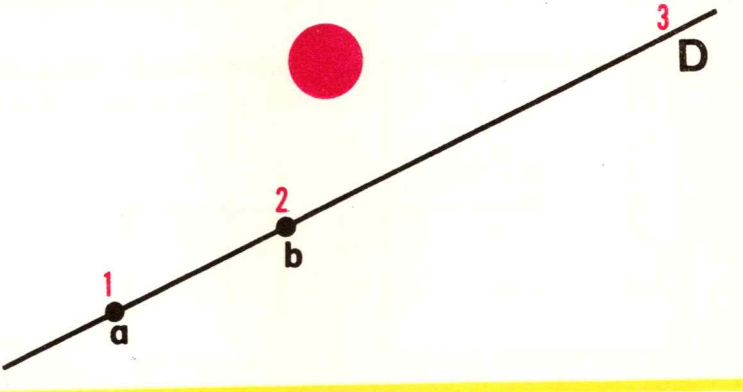
Entonces **t** , **s** , *el eje de* **s**

se denominan

la **traslación** , *la* **simetría** , *el* **eje**

de la simetría deslizada $s \circ t = t \circ s$

SIMETRIA DESLIZADA



EJE : D	SIMETRIA : s_D	TRASLACION : $2\overrightarrow{ab}$

FIG. 127

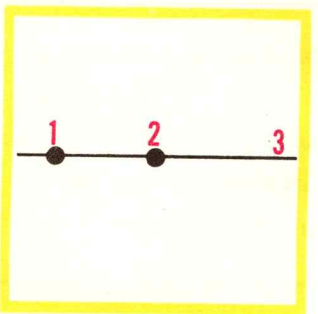
PROPOSICION

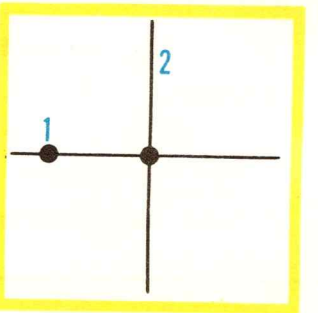
Toda simetría deslizada es
la compuesta de una simetría central y de una simetría
y la compuesta de una simetría y de una simetría central.

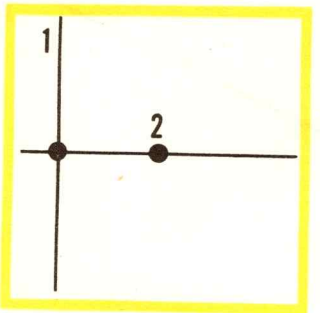
Es decir,

$\mathcal{S} \circ \mathcal{C} = \mathcal{C} \circ \mathcal{S}$ *es el* **conjunto de simetrías deslizadas**

DEMOSTRACION :







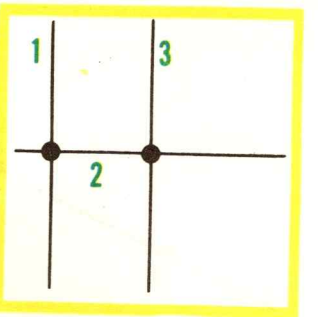
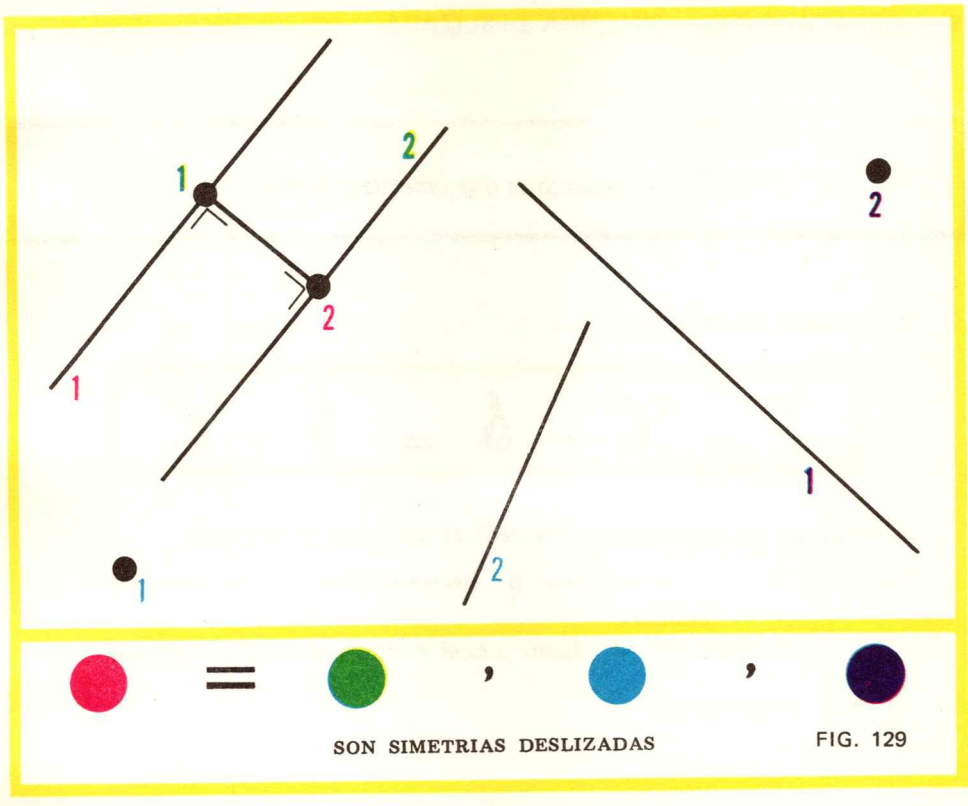


FIG. 128

l.q.q.d.



SON SIMETRIAS DESLIZADAS

FIG. 129

SIMETRIA DESLIZADA

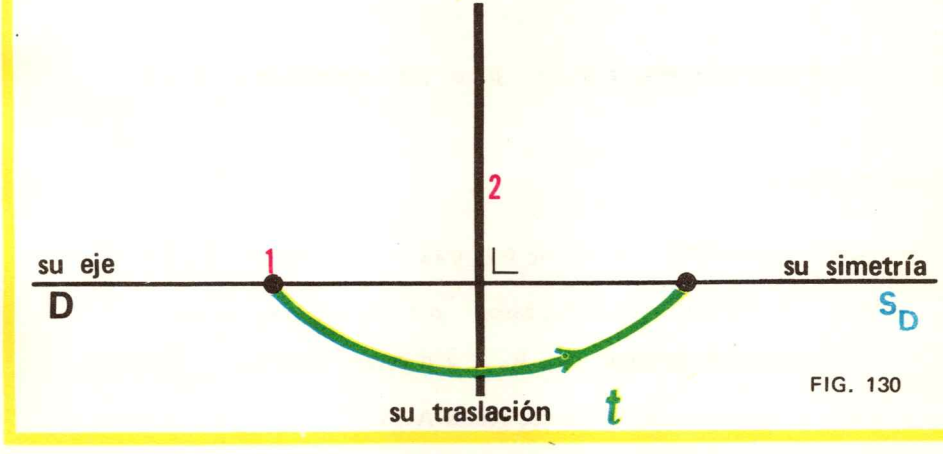


FIG. 130

3 – REBATIMIENTO = SIMETRIA DESLIZADA

TEOREMA

Todo rebatimiento es una simetría deslizada

O expresado de otro modo :

$$\mathcal{T} = \mathcal{C} \circ \mathcal{S} = \mathcal{S} \circ \mathcal{C}$$

La recíproca de toda simetría deslizada es una simetría deslizada.

Por tanto, **si** la recíproca ρ^{-1} del rebatimiento ρ es una simetría deslizada.

entonces el rebatimiento ρ es él mismo una simetría deslizada.

Entonces, bastará probar que

Para todo rebatimiento ρ : $\rho \circ \rho^{-1}$ es una simetría deslizada

o también

Para todo rebatimiento ρ : $\rho \circ \rho^{-1}$ pertenecen a $\mathcal{S} \circ \mathcal{C}$

DEMOSTRACION :

He aquí un rebatimiento $\rho = s_C \circ s_B \circ s_A$ (con A , B , C $\in \mathfrak{D}$)

- **o bien** A ∥ B ∥ C y en ese caso, $\rho = s_C \circ s_B \circ s_A = s_D$ con D ∥ A . . . y ρ es una simetría . . . deslizada.
- **o bien** B corta a una de las dos rectas A , C

Y así de todas formas,

$$\rho = s_C \circ s_B \circ s_A \quad \text{o} \quad \rho^{-1} = s_A \circ s_B \circ s_C$$

que escribimos

$$s_Q \circ s_B \circ s_P \quad \text{o} \quad \text{B corta a P}$$

De donde la situación

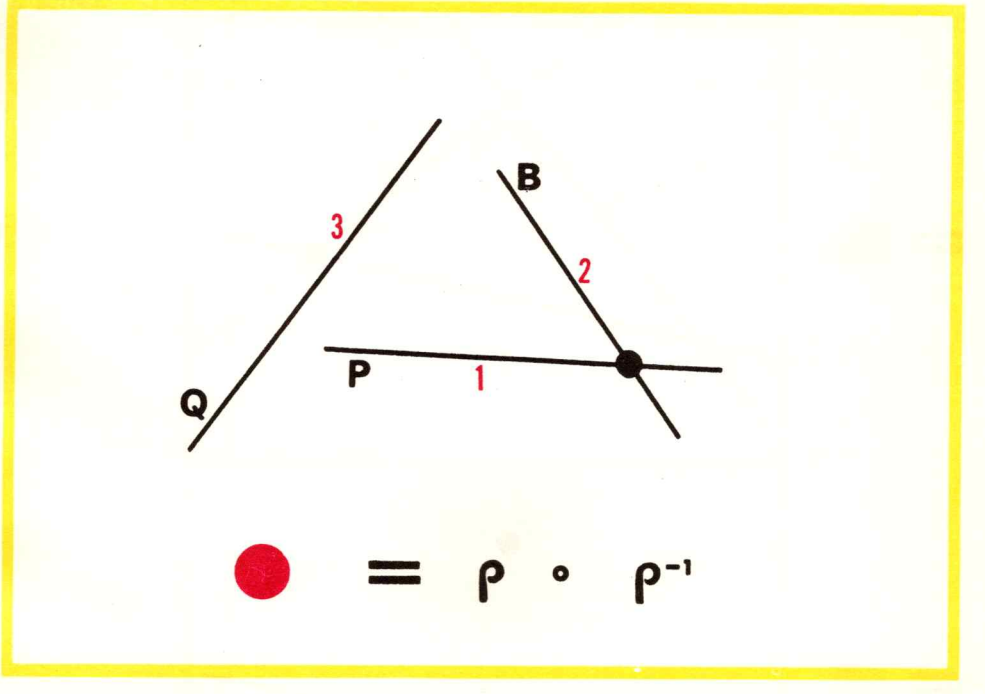
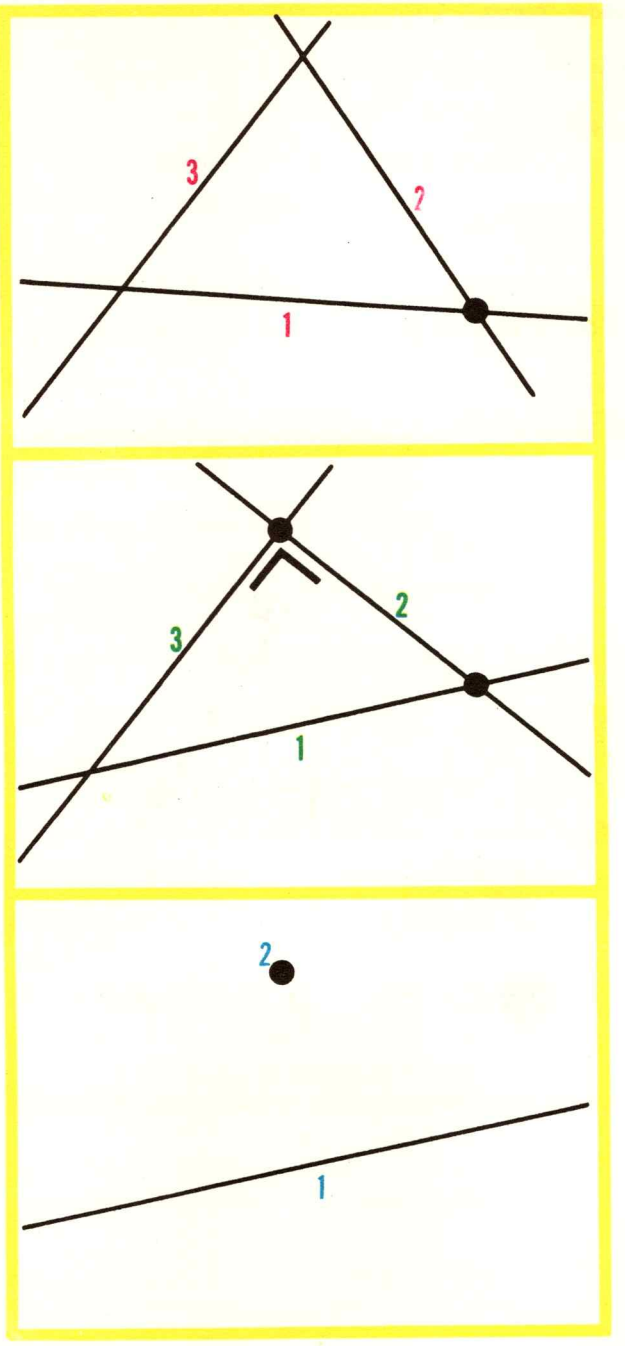


FIG. 131



Samba 3

FIG. 132

l.q.q.d.

REBATIMIENTOS o SIMETRIAS DESLIZADAS

$$\mathcal{J}^- = \mathcal{S} \circ \mathcal{S} \circ \mathcal{S} = \mathcal{S} \circ \mathcal{C} = \mathcal{C} \circ \mathcal{S}$$

$$\forall \rho \in \mathcal{J}^-, \exists\, ! \, t \in \mathcal{T}: \qquad \rho^2 = t^2$$

t *se denomina* **la traslación del rebatimiento** ρ

$s = t^{-1} \circ \rho = \rho \circ t^{-1}$ *es una simetría de eje paralelo a* t

s *se denomina* **la simetría del rebatimiento** ρ

el eje de s *se denomina* **eje del rebatimiento** ρ

$$\rho = s \circ t$$

es la única factorización de ρ *en la compuesta de una traslación y de una simetría de eje paralelo a la traslación.*

$$\rho = t \circ s$$

es la única factorización de ρ *en la compuesta de una simetría y de una traslación paralela al eje de la simetría.*

Un **rebatimiento** *es una* **simetría**

ssi

su cuadrado es igual a la **transformación idéntica.**

4 – LAS SIMETRIAS ENTRE LOS REBATIMIENTOS

Acabamos de recordar que

Para todo $\rho \in \mathcal{T}^-$

$$\rho \in \mathcal{S} \iff \rho^2 = 1_\Pi$$

PROPOSICION

Un rebatimiento es una simetría

ssi

admite un punto fijo (al menos).

Toda simetría admite una recta de puntos fijos.

Basta establecer que
todo rebatimiento (o simetría deslizada) que admite un punto fijo es una simetría.

DEMOSTRACION :

He aquí un rebatimiento ρ de traslación t y que admite un punto fijo a

$$\rho\,(a) = a$$
$$\rho^2\,(a) = a$$
$$t^2\,(a) = a \qquad \text{(pues } \rho^2 = t^2\text{)}$$

La traslación t^2 admite el punto fijo a

Por tanto $\rho^2 = t^2 = 1_\Pi$

y, en virtud del criterio recordado antes : $\rho \in \mathcal{S}$

I.q.q.d.

El teorema de las tres simetrías nos indica que

2º		3º	
Si	las rectas A , B , C son paralelas	**Si**	las rectas A , B , C comprenden un mismo punto
Entonces	$s_C \circ s_B \circ s_A \in \mathcal{J}$	**Entonces**	$s_C \circ s_B \circ s_A \in \mathcal{J}$

PROPOSICION — $A, B, C \in \mathfrak{D}$:

$s_C \circ s_B \circ s_A \in \mathcal{J} \iff$ A ∥ B ∥ C **o** A , B , C *comprenden un mismo punto*

Teniendo en cuenta el teorema de las tres simetrías, basta probar $\Longrightarrow$

DEMOSTRACION DE $\Longrightarrow$

$$s_C \circ s_B \circ s_A \in \mathcal{J}$$

Existe $D \in \mathfrak{D}$ tal que

$$s_C \circ s_B \circ s_A = s_D$$
$$s_B \circ s_A = s_C \circ s_D$$

o bien	**o bien**
$A \cap B = \phi$	$o \in A \cap B$
$s_B \circ s_A = s_C \circ s_D$	$s_B \circ s_A \in \mathcal{R}_o$
es una traslación perpendicular a	$s_C \circ s_D \in \mathcal{R}_o$
A y B ⎸ C y D	$o \in C \cap D$
A ∥ B ∥ C	$o \in A \cap B \cap C$

l.q.q.d.

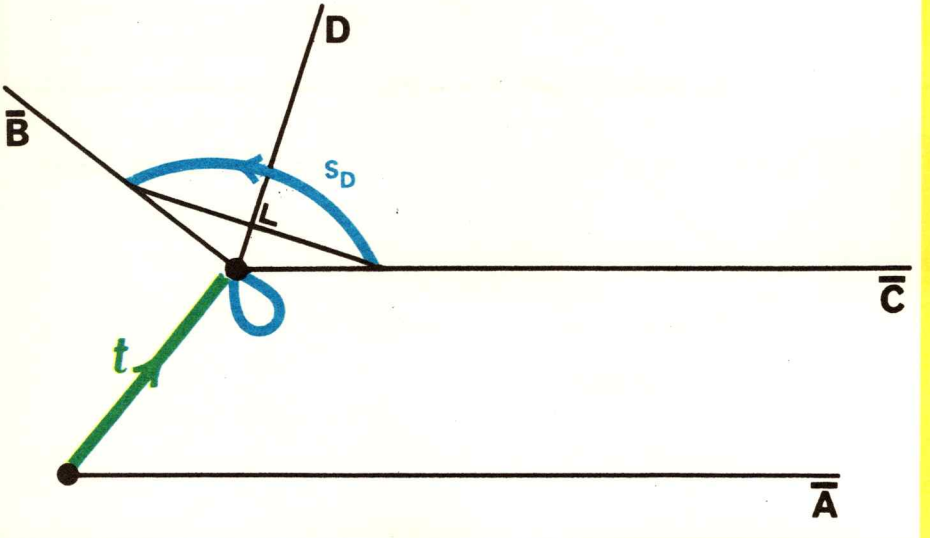
5 – REBATIMIENTO DEFINIDO POR UNA CUPLA DE SEMIRRECTAS

PROPOSICION

Para toda cupla de semirrectas cerradas $\overline{A}$, $\overline{B}$

existe uno y sólo un rebatimiento que aplica $\overline{A}$ *sobre* $\overline{B}$

1º *Existe un rebatimiento que aplica* $\overline{A}$ *sobre* $\overline{B}$



EL REBATIMIENTO $\rho = s_D \circ t$ APLICA $\overline{A}$ SOBRE $\overline{B}$

FIG. 133

2º *Existe uno y sólo un rebatimiento que aplica* $\overline{A}$ *sobre* $\overline{B}$

Si $\rho_1 , \rho_2 \in \mathfrak{J}^-$ y $\rho_1 \overline{A} = \overline{B} = \rho_2 \overline{A}$

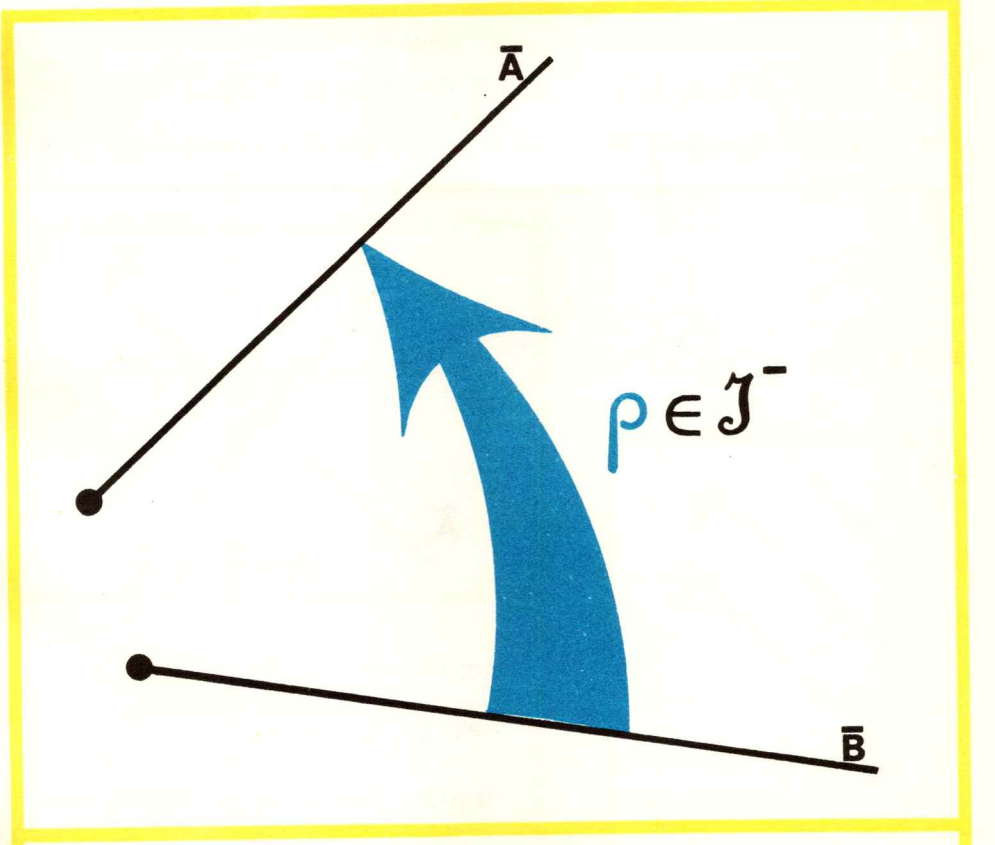
Entonces $\rho_2^{-1} , \rho_1 \in \mathfrak{J}^+$ y $(\rho_2^{-1} \circ \rho_1) \overline{A} = \overline{A}$

$\rho_2^{-1} \circ \rho_1$ es un desplazamiento que aplica $\overline{A}$ sobre $\overline{B}$

$\rho_2^{-1} \circ \rho_1 = 1_\Pi$ (en virtud de (prop. (7.6)

Luego $\rho_1 = \rho_2$

l.q.q.d.



● ● ● Y EL REBATIMIENTO ρ QUEDA DETERMINADO FIG. 134

Será cómodo a menudo anotar

$$\text{reb}\ (\overline{A}\ ,\ \overline{B})$$

el rebatimiento que aplica la semirrecta cerrada $\overline{A}$ sobre $\overline{B}$

Si $\overline{A}\ ,\ \overline{B}\ ,\ \overline{C}\ ,\ \overline{D}$ son semirrectas cerradas y A la recta que contiene a $\overline{A}$,

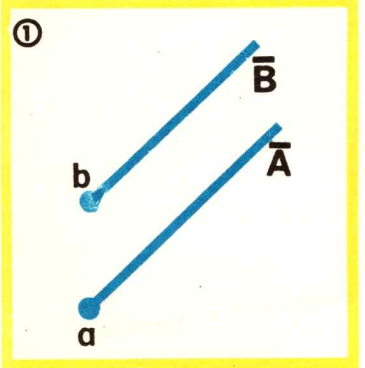
Entonces

$$\text{reb}\ (\overline{A}\ ,\ \overline{A}) = s_A \quad ; \quad \text{desp}\ (\overline{A}\ ,\ \overline{A}) = 1_\Pi$$

$$\text{reb}\ (\overline{B}\ ,\ \overline{C})\ \text{o}\ \text{reb}(\overline{A}\ ,\ \overline{B}) = \text{desp}\ (\overline{A}\ ,\overline{C}) = \text{desp}\ (\overline{B}\ ,\ \overline{C})\ \text{o}\ \text{desp}\ (\overline{A}\ ,\ \overline{B})$$

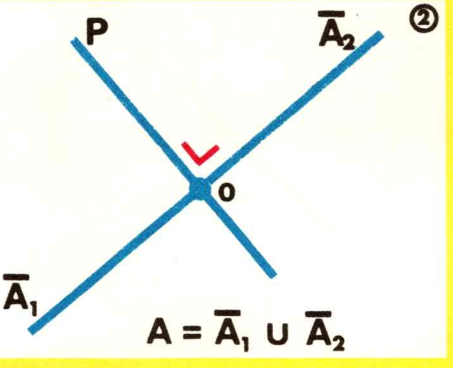
$$\text{desp}\ (\overline{B}\ ,\ \overline{C})\ \text{o}\ \text{reb}\ (\overline{A}\ ,\ \overline{B}) = \text{reb}\ (\overline{A}\ ,\ \overline{C}) = \text{reb}\ (\overline{B}\ ,\ \overline{C})\ \text{o}\ \text{desp}\ (\overline{A}\ ,\ \overline{B})$$

EJEMPLOS



$$\text{desp}\ (\overline{A}\ ,\ \overline{B}) = \overrightarrow{ab}$$

FIG. 135



$$\text{desp}\ (\overline{A}_1\ ,\ \overline{A}_1) = 1_\Pi$$

$$\text{reb}\ (\overline{A}_1\ ,\ \overline{A}_1) = s_A$$

$$\text{desp}\ (\overline{A}_1\ ,\ \overline{A}_2) = s_o = \text{desp}\ (\overline{A}_2\ ,\ \overline{A}_1)$$

$$\text{reb}\ (\overline{A}_1\ ,\ \overline{A}_2) = s_P = \text{reb}\ (\overline{A}_2\ ,\ \overline{A}_1)$$

FIG. 136

6 — EJERCICIOS

1. Toda simetría es una simetría deslizada.
   Su eje como simetría = Su eje como simetría deslizada.
   ¡Felizmente!

2. El cuadrado (de composición) de todo rebatimiento es una traslación.

3. $\mathcal{J}$ es el conjunto de rebatimientos cuya traslación es 1_Π
   (o cuya traslación es **nula** . . . si adoptamos la terminología aditiva)

4. Si tenemos los puntos distintos a , b $\in$ Π
   ¿Cuál es el conjunto de los rebatimientos de traslaciones $\overrightarrow{ab}$?

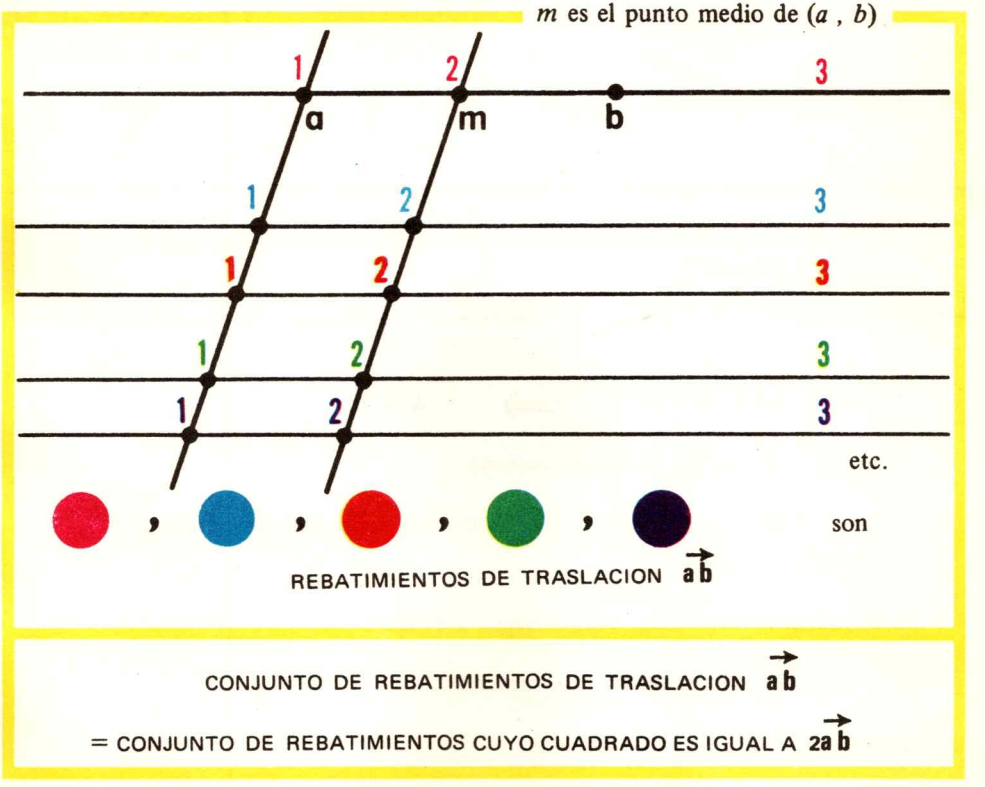


FIG. 137

4. En el grupo $\mathfrak{C}$, o

toda traslación admite una y sólo una raíz cuadrada.

5. En el grupo $\mathfrak{I}$, , o

toda traslación admite infinitas raíces cuadradas.

6. Si tenemos tres puntos no alineados (en los que $a \neq b \neq c \neq a$)

La mediatriz A de $\{ b , c \}$
B de $\{ a , c \}$
C de $\{ a , b \}$ se denominan **mediatrices** de $\{ a , b , c \}$

Vamos a probar que

> La intersección de las mediatrices de toda terna de puntos no alineados es un conjunto unitario .

$$A \perp bc \nparallel ac \perp B \implies A \nparallel B \qquad (1)$$

$A \cap B$ es un conjunto unitario

$A \cap B$, $B \cap C$, $A \cap C$ son conjuntos unitarios (2)

El rebatimiento $s_C \circ s_B \circ s_A$ deja a b fijo

$s_C \circ s_B \circ s_A$ constituye una simetría

$A \parallel B \parallel C$ ó $A \cap B \cap C \neq \phi$

Y teniendo en cuenta (1) y (2) : $A \cap B \cap C$ es un conjunto unitario

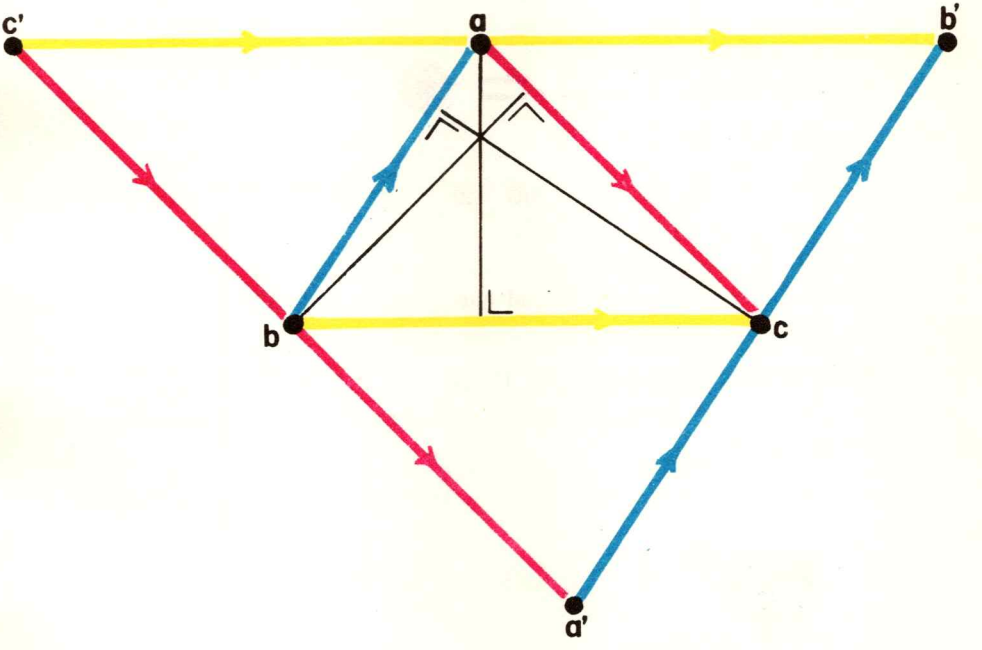
7. He aquí una terna de puntos no alineados $(a\ ,\ b\ ,\ c)$

Las rectas A que comprende a a y es perpendicular a bc

B que comprende a b y es perpendicular a ac

C que comprende a c y es perpendicular a ab

se denominan **alturas** de la terna $(a\ ,\ b\ ,\ c)$



LAS ALTURAS DE (a , b , c) SON LAS MEDIATRICES DE (a' , b' , c')

FIG. 138

La intersección de las **alturas** de toda terna de puntos no alineados es un **conjunto unitario.**

8. ¿Cuál será el menor conjunto E tal que $x \in E = \rho E$?

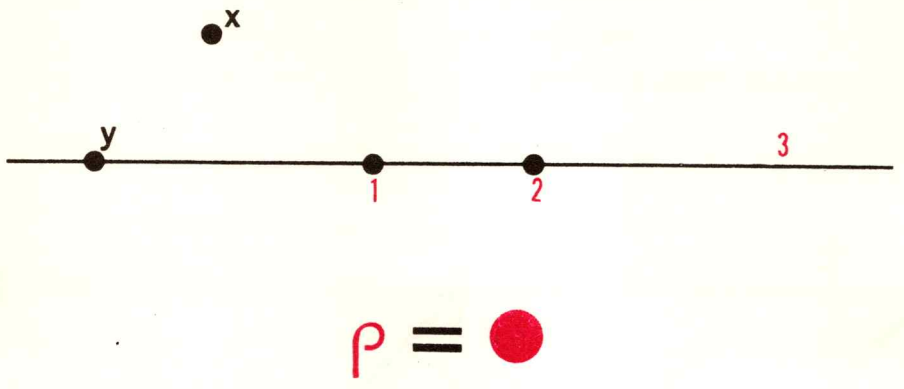


FIG. 139

¿Cuál será el menor conjunto F tal que $y \in F = \rho F$?

9. ¿Cuál será el menor conjunto $E \subset \Pi$ tal que $P \subset E = \rho E$?

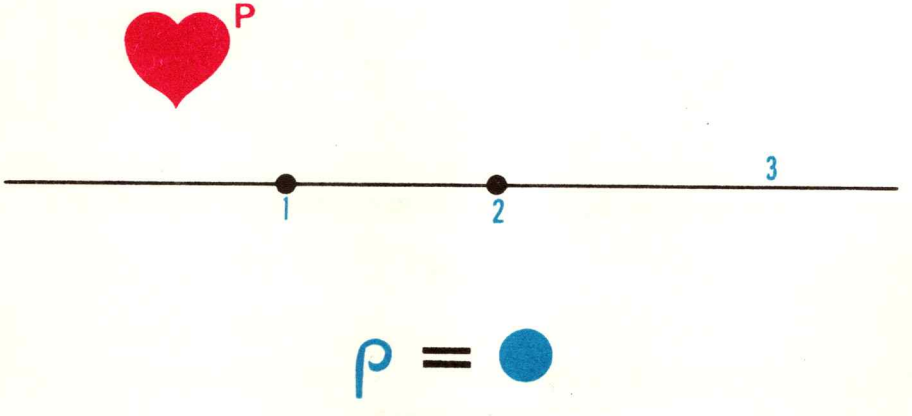


FIG. 140

10. ¿Cuál es la compuesta de una sucesión par de simetrías cuyos ejes son paralelos?

11. ¿Cuál es la compuesta de una sucesión impar de simetrías cuyos ejes son paralelos?

12.

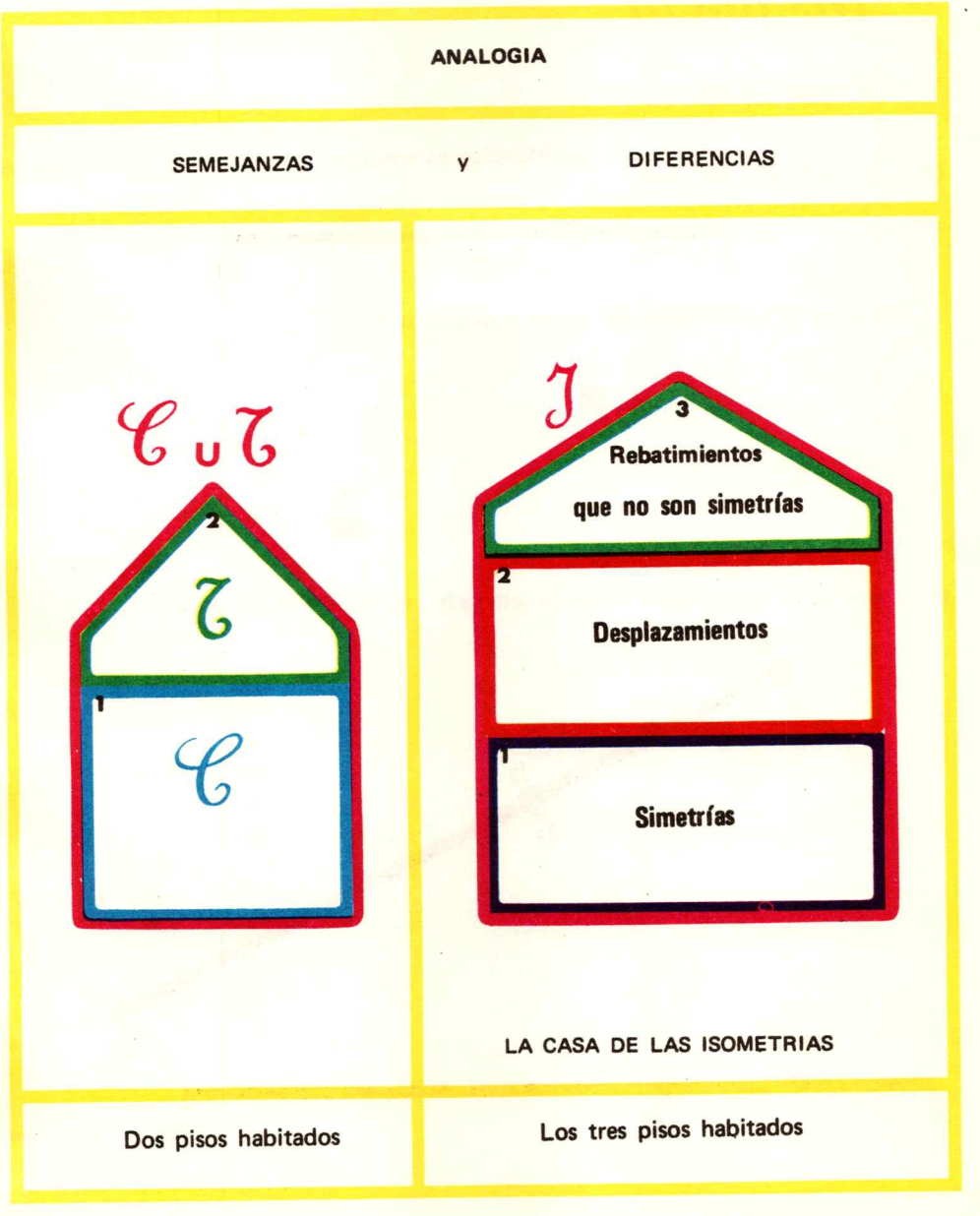


FIG. 141

9

Distancia

1 — INTRODUCCION

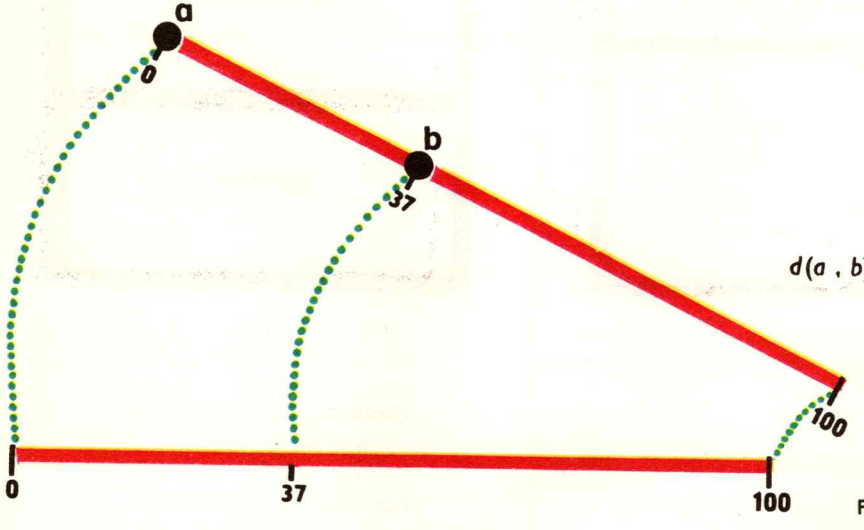
En la práctica, para medir las distancias, es necesario primeramente una **unidad**, es decir un "metro" : helo aquí

FIG. 142

Para medir la distancia del punto *a* al punto *b*

FIG. 143

se **transporta** el metro sobre la semirrecta $[a\,b$. el cero se aplica en *a*



$d(a\,,\,b) = 37$

FIG. 144

Este procedimiento no encierra contradicción porque todos estos transportes aplican de la misma manera el metro sobre la semirrecta [*a b*

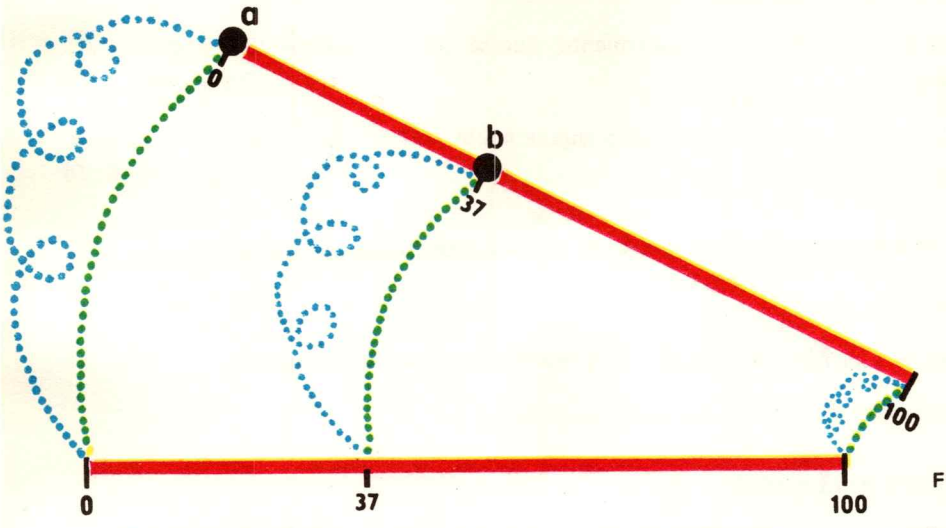
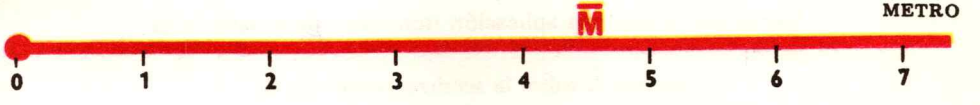


FIG. 145

El transporte verde y el azul definen la misma aplicación del metro sobre [*a b*

Este procedimiento elemental inspira la definición de la distancia en geometría.

Aquí tenemos nuestro "**metro**"



NUESTRO "METRO" FIG. 146

Se trata de una semirrecta cerrada graduada cuyo origen se designa por el 0 y otro de sus puntos por el 1

El transporte del metro sobre la semirrecta que debemos **medir** [*a b* se reemplaza aquí por una isometría que aplica el metro sobre [*a b*

Conviene entonces probar que

Todas las isometrías aplican de la misma manera el metro sobre la semirrecta [a b

2 – ISOMETRIAS DEFINIDAS POR UNA CUPLA DE SEMIRRECTAS

He aquí dos semirrectas cerradas $\overline{A}$ y $\overline{B}$

Existe uno y sólo un desplazamiento, que se anota $\text{desp}(\overline{A}, \overline{B})$, y aplica $\overline{A}$ sobre $\overline{B}$ (Proposición 7 . 7)

Existe uno y sólo un rebatimiento, que se anota $\text{reb}(\overline{A}, \overline{B})$, y aplica $\overline{A}$ sobre $\overline{B}$ (Proposición 8 . 5)

Y entonces $\text{desp}(\overline{A}, \overline{B})$ y $\text{reb}(\overline{A}, \overline{B})$ son las *solas isometrías* que aplican $\overline{A}$ sobre $\overline{B}$

Vamos a probar que $\text{desp}(\overline{A}, \overline{B})$ y $\text{reb}(\overline{A}, \overline{B})$ *aplican de la misma manera* $\overline{A}$ sobre $\overline{B}$

O dicho de otro modo :

Si $d = \text{desp}(\overline{A}, \overline{B})$ y $\rho = \text{reb}(\overline{A}, \overline{B})$

Entonces $\forall x \in \overline{A} : d(x) = \rho(x)$

Abreviando,

TEOREMA

Existe una y sólo una aplicación isométrica de la semirrecta cerrada $\overline{A}$ sobre la semirrecta cerrada $\overline{B}$

DEMOSTRACION :

$$\rho = \text{reb}(\overline{A}, \overline{B}) \qquad d = \text{desp}(\overline{A}, \overline{B})$$

$$d^{-1} = \text{desp}(\overline{B}, \overline{A})$$

$$\rho \circ d^{-1} = \text{reb}(\overline{A}, \overline{B}) \circ \text{desp}(\overline{B}, \overline{A}) = \text{reb}(\overline{B}, \overline{B}) = s_B$$

$$\rho \circ d^{-1} = s_B$$

$$\rho = s_B \circ d$$

$$\forall x \in \overline{A} : d(x) \in B \text{ y } \rho(x) = s_B\left(d(x)\right) = d(x)$$

l.q.q.d.

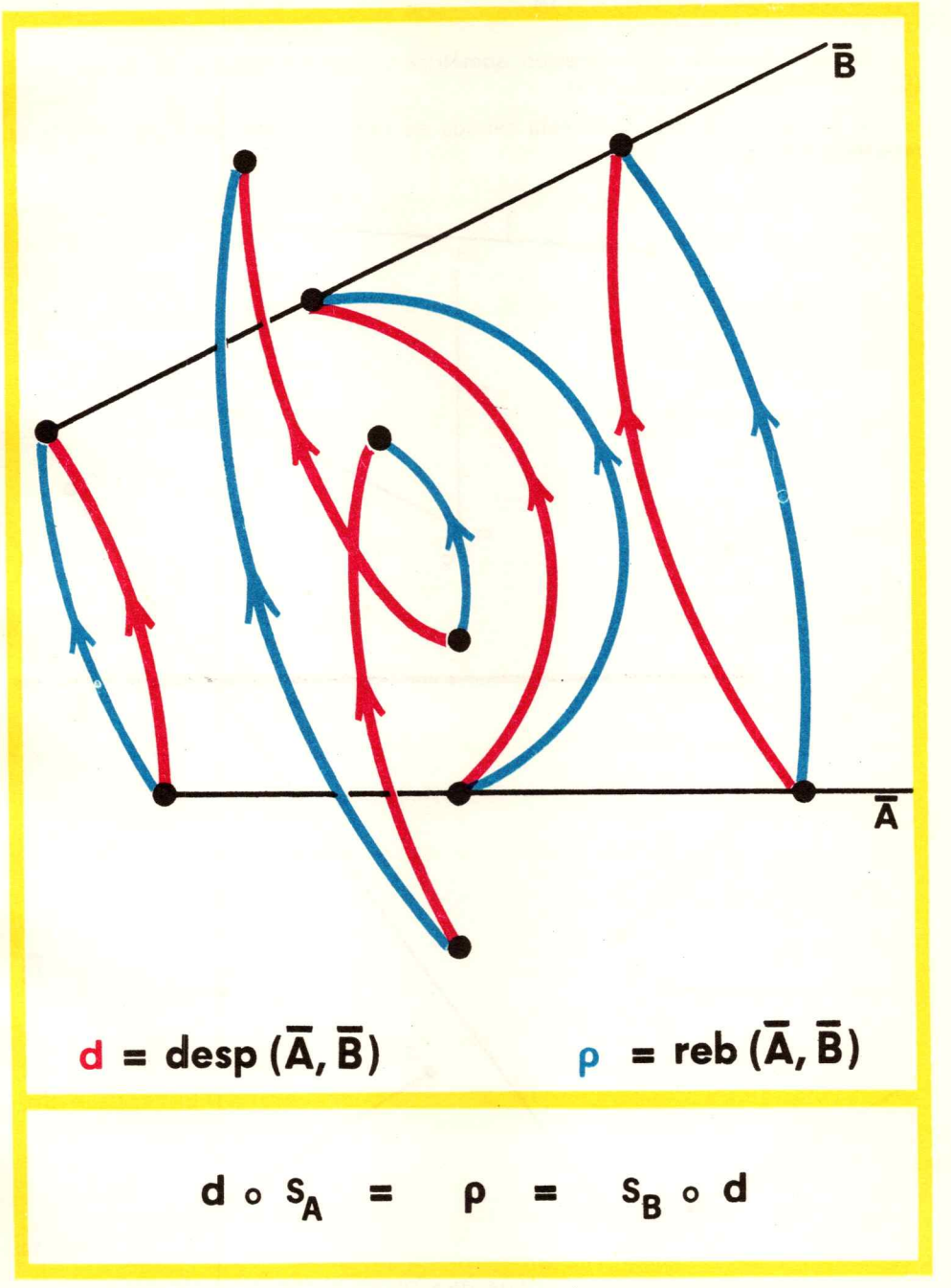


FIG. 147

3 – DEFINICION DE DISTANCIA

Existe una y sólo una aplicación isométrica de nuestro metro y de su referencia (0,1) sobre toda semirrecta cerrada.

Se provee así a toda semirrecta cerrada de una referencia particular llamada su **referencia métrica.**

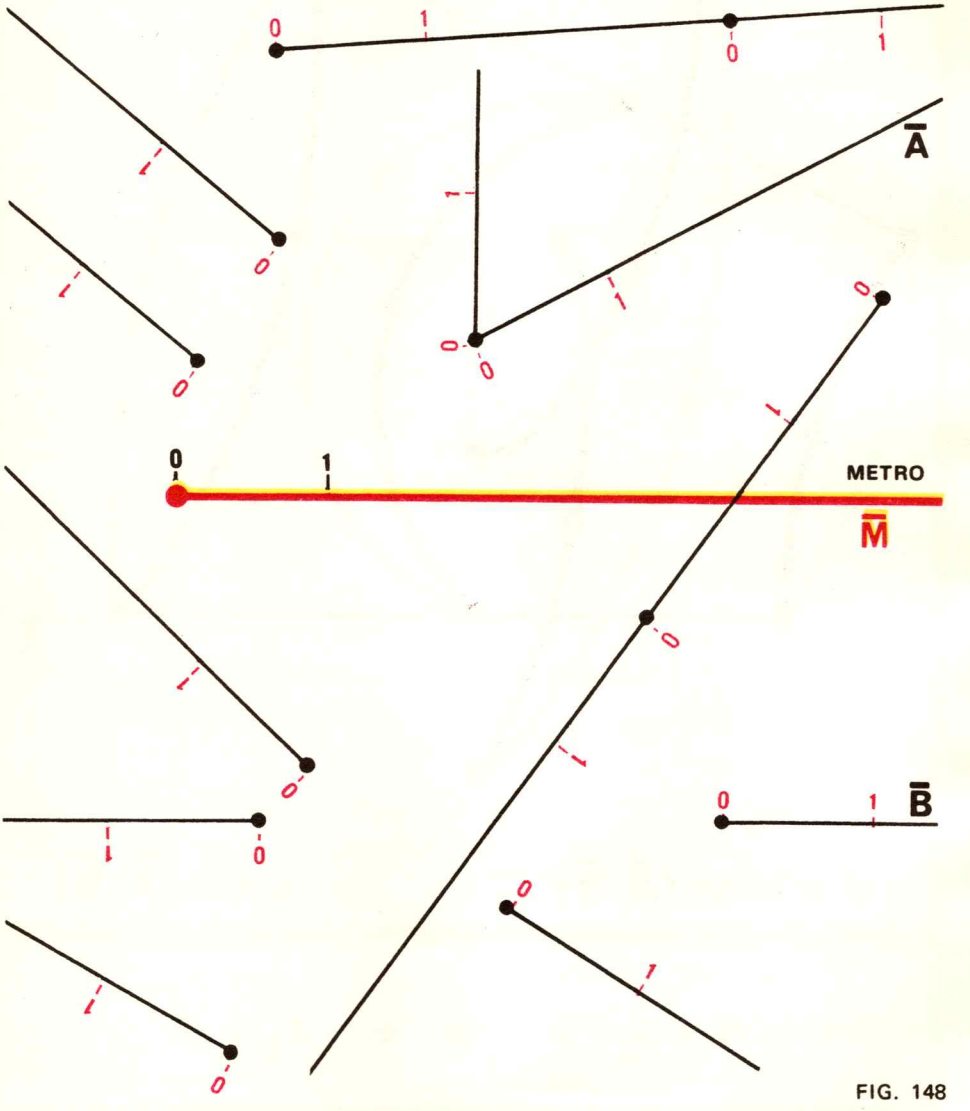


FIG. 148

SEMIRRECTAS PROVISTAS CADA UNA DE SU REFERENCIA METRICA

Toda isometría que aplica $\overline{A}$ sobre $\overline{B}$ aplica la referencia de $\overline{A}$ sobre la de $\overline{B}$

CONVENCION

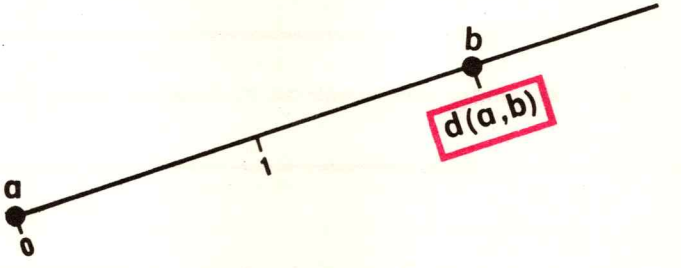
Salvo indicación contraria cada vez que una semirrecta sea provista de una referencia, se tratará de una referencia métrica.

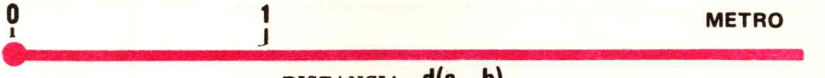
DEFINICION

He aquí dos puntos distintos a , b

La abscisa de b en la referencia métrica de $[a\ b$ *es la* **distancia de la cupla** *(a , b) y se designa* $d(a , b)$

Se completará naturalmente esta definición estableciendo que $d(a , a) = 0$





DISTANCIA **d(a , b)**

FIG. 149

Cada vez que hablemos de distancia, supondremos siempre que **el metro** (o unidad) **ha sido fijado ya una vez para siempre.**

La distancia es, pues, una aplicación suryectiva

$$d : \Pi \times \Pi \rightarrow \mathbf{R}^{+} : (x , y) \rightarrow d(x , y)$$

Además, $d(x , y) = 0 \iff x = y$

No es difícil prever cuál es el efecto de un cambio de metro sobre la distancia. El párrafo 13 (que puede ser consultado inmediatamente si se desea) responde a esta pregunta.

4 – CUPLAS ISOMETRICAS

DEFINICION

Las cuplas de puntos (a , b) *y* (c , d) *son* **isométricas**
$\left(\textit{lo que se designa por } (a , b) \textbf{ iso } (c , d)\right)$

ssi

existe una isometría t *tal que* $t(a) = c \ , \ t(b) = d$

TEOREMA

Dos cuplas de puntos son isométricas ssi tienen la misma distancia

$\forall\, a , b , x , y \in \Pi$

(a , b) iso $(x , y) \iff d(a , b) = d(x , y)$

DEMOSTRACION DE $\Longrightarrow$

Tenemos una isometría t que aplica (a , b) sobre (x , y)

Por tanto : t aplica $[a\, b$ sobre $[x\, y$

y la referencia métrica $[a\, b$ *sobre la de* $[x\, y$

La isometría t respeta las abscisas.

Por tanto

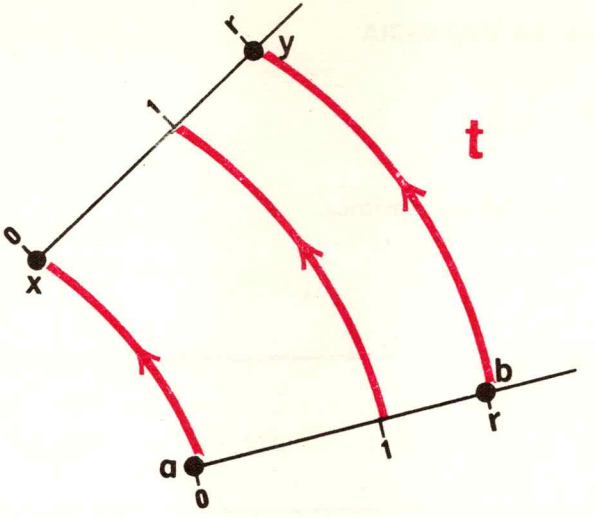


FIG. 150

$$d(a, b) = r = d(x, y)$$ l.q.q.d.

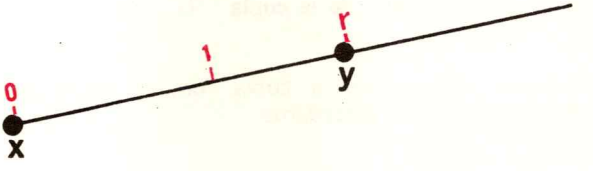
Toda isometría conserva la distancia

. . . y por ello me llaman **ISOMETRIA!**

DEMOSTRACION DE $\Longleftarrow$

Proveyamos a las semirrectas $[a\,b$ y $[x\,y$ de sus referencias métricas y pongamos

$$r = d(a, b) = d(x, y)$$



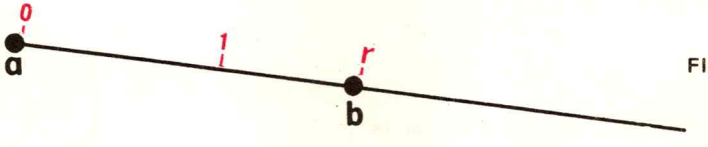


FIG. 151

Llamemos t a una de las isometrías que aplican $[a\,b$ sobre $[x\,y$
La isometría aplica la referencia métrica de $[a\,b$ sobre la de $[x\,y$
Esta isometría respeta las abscisas.
Finalmente t aplica a sobre x (puntos de abscisas 0)
y b sobre y (puntos de abscisas r)
Luego (a, b) iso (x, y) l.q.q.d.

5 – SIMETRIA DE LA DISTANCIA

PROPOSICION

La distancia es una función **simétrica.**

O dicho de otro modo

$$\forall\, x, y \in \Pi \quad : \quad d(x, y) = d(y, x)$$

DEMOSTRACION :

Basta considerar el caso en que $x \neq y$

Llamemos M a la mediatriz de la cupla (x, y)

La isometría s_M aplica la cupla (x, y) sobre la cupla (y, x) y la proposición resulta del párrafo precedente.

l.q.q.d.

Esta proposición permite enunciar la

DEFINICION

La distancia $d(a, b) = d(b, a)$ *se denomina también* **longitud del segmento** $[ab]$

Resumiendo :

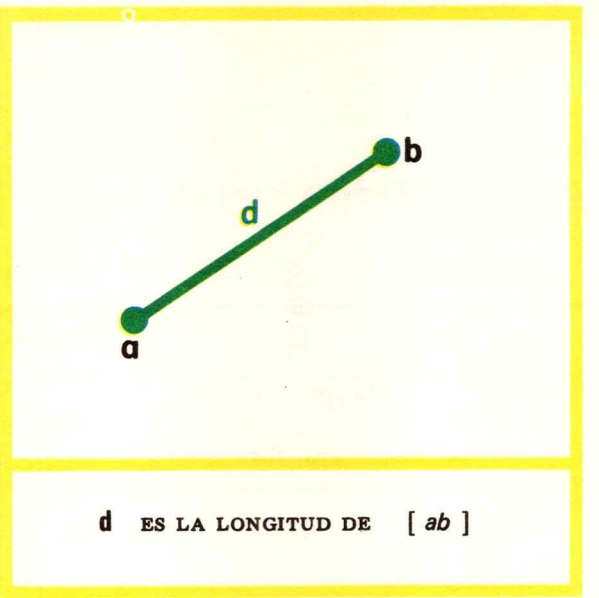


FIG. 152

Por tanto :

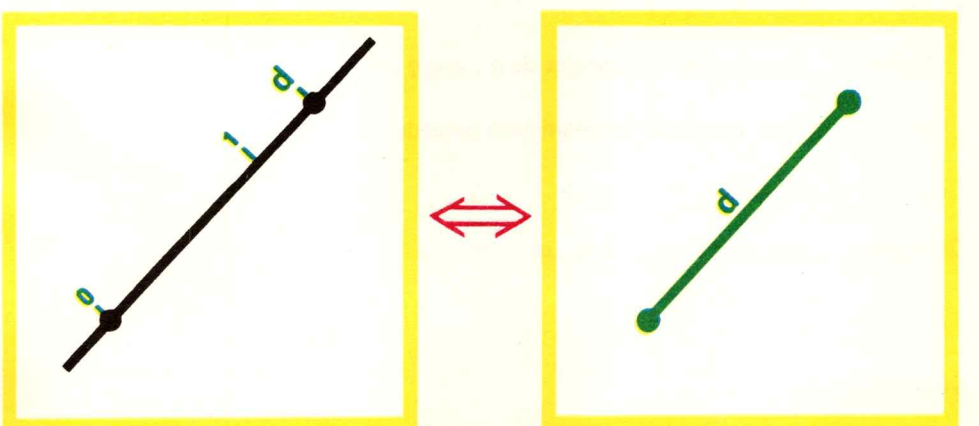
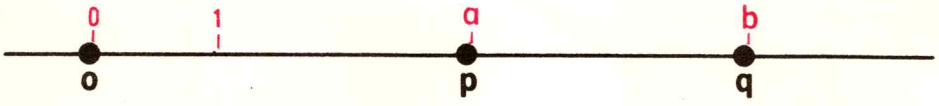


FIG. 153

6 – DISTANCIA Y ABSCISAS

Problema

La recta p q está provista de una referencia métrica



$d(p, q) = ?$

FIG. 154

Solución

- **Si** $a < b$

  Entonces la traslación $\overrightarrow{po}$ aplica p sobre o y q sobre el punto r de abscisa $b-a$

  De donde $d(p, q) = d(o, r) = b-a$

- **Si** $b < a$

  Entonces se permutan los papeles de p , a y q , b

  y en virtud del razonamiento precedente,

  $d(q, p) = a-b$

De donde $d(p, q) = d(q, p) = a-b$

Conclusión

En todos los casos, $d(p, q) = |a-b|$

7 – MEDIATRIZ

TEOREMA

Si M *es la* **mediatriz** *de la cupla de puntos* **distintos** $a\ ,\ b$

Entonces $x \in M \iff d(a\ ,\ x) = d(b\ ,\ x)$

DEMOSTRACION DE $\Longrightarrow$

Sea $x \in M$

$$s_M(a) = b \quad , \quad s_M(x) = x$$
$$(a\ ,\ x) \quad \textbf{iso} \quad (b\ ,\ x)$$
$$d(a\ ,\ x) = d(b\ ,\ x)$$

l.q.q.d.

DEMOSTRACION DE $\Longleftarrow$

Sea x tal que $d(a\ ,\ x) = d(b\ ,\ x) = r$

Como $a \neq b$, se tiene claramente que $a \neq x \neq b$

Luego

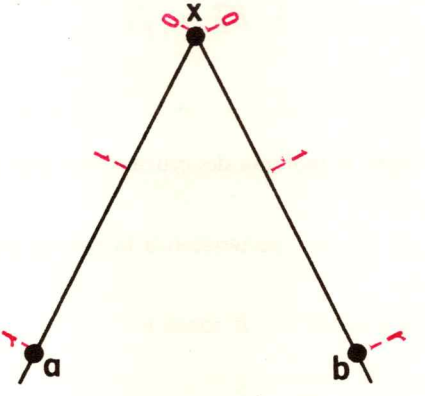


FIG. 155

Llamemos X a la bisectriz de $\left([x\ a\ ,\ [x\ b\right)$

La isometría s_X aplica $[x\ a$ sobre $[x\ b$

y la referencia métrica (roja) de $[x\ a$ sobre la (roja) de $[a\ b$

Como la isometría respeta las abscisas,

luego s_X aplica el punto a (de abscisa r) sobre el punto b (de abscisa r)

Por ello X es la mediatriz de la cupla $(a\ ,\ b)$

$$x \in X = M$$
$$x \in M$$

l.q.q.d.

8 – LONGITUD DE UN VECTOR

TEOREMA

Para todo $a , b , x , y \in \Pi$

$$\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{xy} \Longrightarrow d(a , b) = d(x , y)$$

DEMOSTRACION :

He aquí los puntos a , b , x , y tales que $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{xy}$ (1)

Entonces, $\overrightarrow{ax} = \overrightarrow{ab} + \overrightarrow{by} + \overrightarrow{yx}$

$\overrightarrow{ax} = \overrightarrow{xy} + \overrightarrow{by} + \overrightarrow{yx}$ en virtud de (1)

$\overrightarrow{ax} = \overrightarrow{by}$

(Hemos establecido, en rigor, el teorema del cruzamiento por el cálculo vectorial)

Las cuplas (a , x) y (b , y) pertenecen a la misma traslación t

La isometría t aplica a sobre x y b sobre y

Entonces (a , b) iso (x , y)

y la proposición resulta en virtud del teorema del § 4

l.q.q.d.

DEFINICION

La distancia $d(a , b)$ *se denomina la* **longitud** *o la* **norma** *del vector* $\overrightarrow{ab}$ *y se designa por* $\| \overrightarrow{ab} \|$

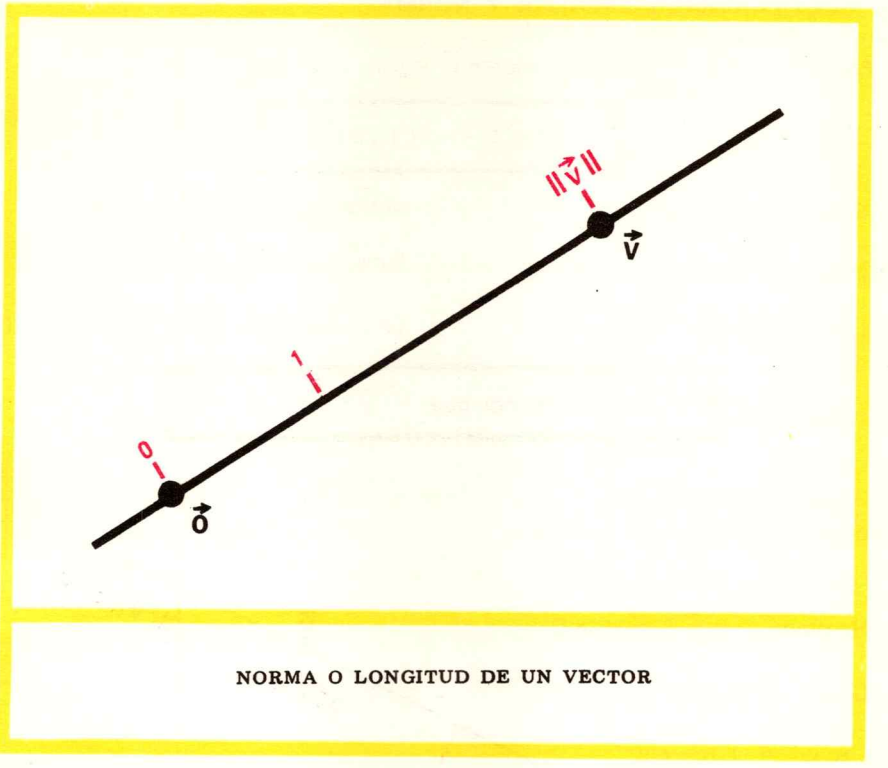


FIG. 156

Naturalmente que

$$\| \vec{v} \| = 0 \iff \vec{v} = \vec{o}$$

PROPOSICION

Para todo vector $\vec{v}$: $\| \vec{v} \| = \| -\vec{v} \|$

DEMOSTRACION :

Hagamos $\vec{v} = \overrightarrow{ab}$

$$\| \vec{v} \| = \| \overrightarrow{ab} \| = d(a, b) = d(b, a) = \| \overrightarrow{ba} \| = \| -\overrightarrow{ab} \| = \| -\vec{v} \|$$

l.q.q.d.

9 – MULTIPLICACION ESCALAR Y NORMA

PROPOSICION 1 – *Para todo vector* $\vec{v}$ *y para todo real* r :

$$\| r\vec{v} \| = |r| \cdot \| \vec{v} \|$$

DEMOSTRACION CUANDO $r = 0$

$\| r\vec{v} \| = \| 0\vec{v} \| = \| \vec{o} \| = 0$

$|r| \cdot \| \vec{v} \| = 0 \cdot \| -\vec{v} \| = 0$

DEMOSTRACION CUANDO $\vec{v} = \vec{o}$

$\| r\vec{v} \| = \| r\vec{o} \| = \| \vec{o} \| = 0$

$|r| \cdot \| \vec{v} \| = |r| \cdot \| \vec{o} \| = |r| \cdot 0 = 0$

Supondremos que $\vec{v} \neq \vec{o}$

DEMOSTRACION CUANDO $r > 0$

Hagamos $\| \vec{v} \| = d > 0$

Como $r > 0$

$[\vec{o}\,\vec{v} = [\vec{o} \cdot r\vec{v}$

Entonces

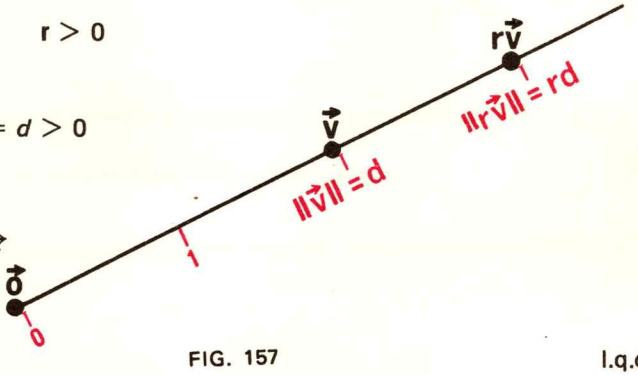


FIG. 157

l.q.q.d.

DEMOSTRACION CUANDO $r < 0$

$$\| r \cdot \vec{v} \| = \| (-r) \cdot (-\vec{v}) \|$$

$= (-r) \| (-\vec{v}) \|$ (en virtud de la demostración precedente y de $-r > 0$)

$= |r| \| -\vec{v} \|$ (pues $-r = |r|$)

$= |r| \cdot \| \vec{v} \|$ (pues $\| -\vec{v} \| = \| \vec{v} \|$)

l.q.q.d.

De ello se desprende inmediatamente

Toda homotecia de razón k multiplica la distancia por | k |

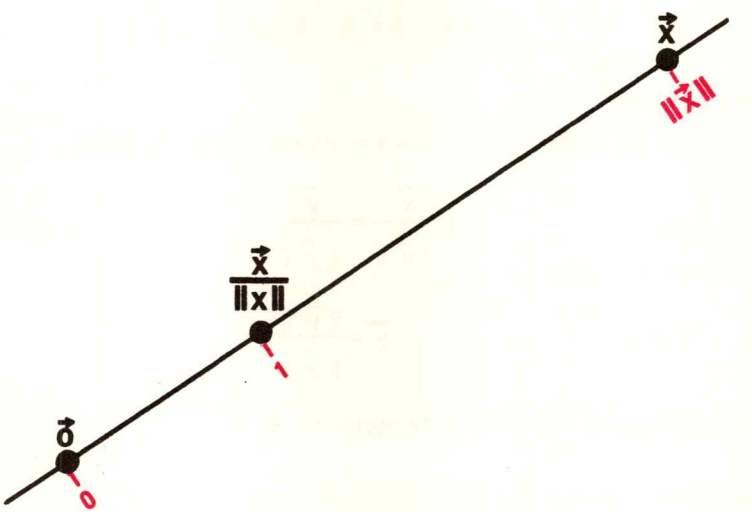
DEFINICION

El vector $\vec{x}$ es *normado* **ssi** $\| \vec{x} \| = 1$

Si $\vec{x}$ es un vector no nulo,

Entonces $\dfrac{\vec{x}}{\| \vec{x} \|}$ es un vector normado.

El vector $\dfrac{\vec{x}}{\| \vec{x} \|}$ se denomina vector normado de $\vec{x}$



$\dfrac{\vec{x}}{\| \vec{x} \|}$ es el vector normado de $\vec{x}$

FIG. 158

PROPOSICION 2

Dos vectores no nulos son paralelos del mismo sentido

$\Updownarrow$

sus vectores normados son iguales

DEMOSTRACION DE $\Downarrow$

He aquí los vectores no nulos $\vec{x}, \vec{y}$ paralelos y del mismo sentido.
$\vec{x}, \vec{y}$ pertenecen a la semirrecta vectorial $\mathbf{R}^+ \vec{e}$

$$\vec{x} = a\vec{e} \quad , \quad \vec{y} = b\vec{e} \qquad (a, b \in \mathbf{R}^+ \ , \ \vec{e} \neq \vec{o})$$

$$\| \vec{x} \| = | a | . \| \vec{e} \| \quad , \quad \| \vec{y} \| = | b | . \| \vec{e} \|$$

$$\| \vec{x} \| = a . \| \vec{e} \| \quad , \quad \| \vec{y} \| = b . \| \vec{e} \|$$

$$\frac{\vec{x}}{\| \vec{x} \|} = \frac{a\vec{e}}{a \| \vec{e} \|} = \frac{\vec{e}}{\| \vec{e} \|} = \frac{b\vec{e}}{b \| \vec{e} \|} = \frac{\vec{y}}{\| \vec{y} \|}$$

DEMOSTRACION DE $\Uparrow$

Los vectores no nulos $\vec{x}, \vec{y}$ tienen el mismo vector normado

$$\frac{\vec{x}}{\| \vec{x} \|} = \frac{\vec{y}}{\| \vec{y} \|}$$

$$\vec{y} = \frac{\| \vec{y} \|}{\| \vec{x} \|} \vec{x}$$

$\vec{x}$ y $\vec{y}$ pertenecen a la semirrecta vectorial $\mathbf{R}^+ \vec{x}$

l.q.q.d.

OBSERVACION :

Al fin de este párrafo hemos utilizado implícitamente

CONVENCION DE ESCRITURA

$$\forall k \in \mathbf{R}_o \quad ; \quad \forall \vec{x} \in \Pi_o \quad : \quad \frac{\vec{x}}{k} = k^{-1} . \vec{x}$$

10 – ISOMETRIAS Y SEMIPLANOS

Toda isometría t aplica todo semiplano cerrado de borde D sobre un semiplano cerrado de borde tD

La simetría s_D aplica cada uno de los semiplanos cerrados de borde D sobre el otro semiplano cerrado de borde D

He aquí la semirrecta cerrada $\overline{A}$ incluida en la recta A

y la semirrecta cerrada $\overline{B}$ incluida en la recta B

Establezcamos $d = \text{desp}(\overline{A}, \overline{B})$ y $\rho = \text{reb}(\overline{A}, \overline{B})$

Entonces $d\,\overline{A} = \overline{B}$ $\quad \rho\,\overline{A} = \overline{B}$

$d\,A = B$ $\quad \rho\,A = B$

Llamemos $\overline{\Pi}$ a uno de los semiplanos cerrados de borde A

Entonces $d\,\overline{\Pi}$ es **uno** de los semiplanos cerrados de borde B

Luego $\rho = s_B \circ d$

Por lo tanto $\rho\,\overline{\Pi}$ es **el otro** semiplano cerrado de borde B

Y de ello resulta la

PROPOSICION

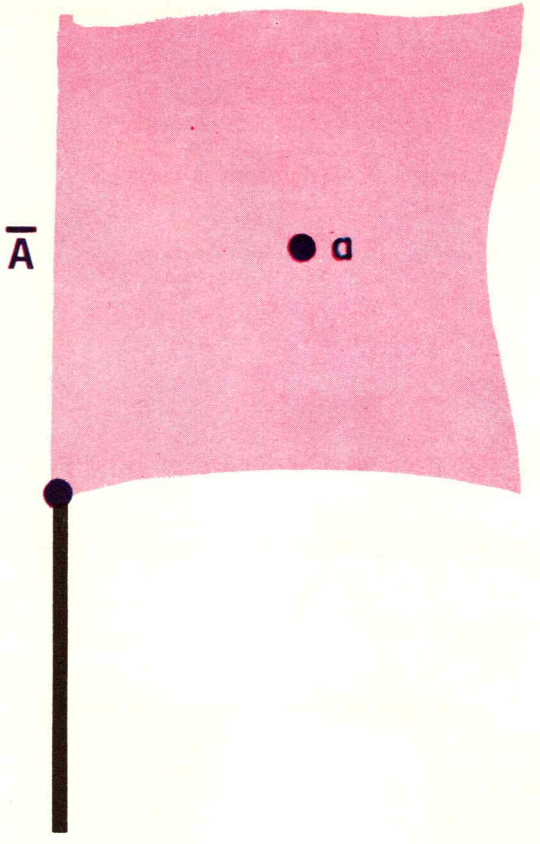
Si $\overline{A}$ *es una semirrecta incluida en la recta* A *que no comprende al punto a*

$\overline{B}$ *es una semirrecta incluida en la recta* B *que no comprende al punto b*

Entonces *existe una y sólo una isometría t que aplica*

$\overline{A}$ sobre $\overline{B}$ y [A*a* sobre [B*b*

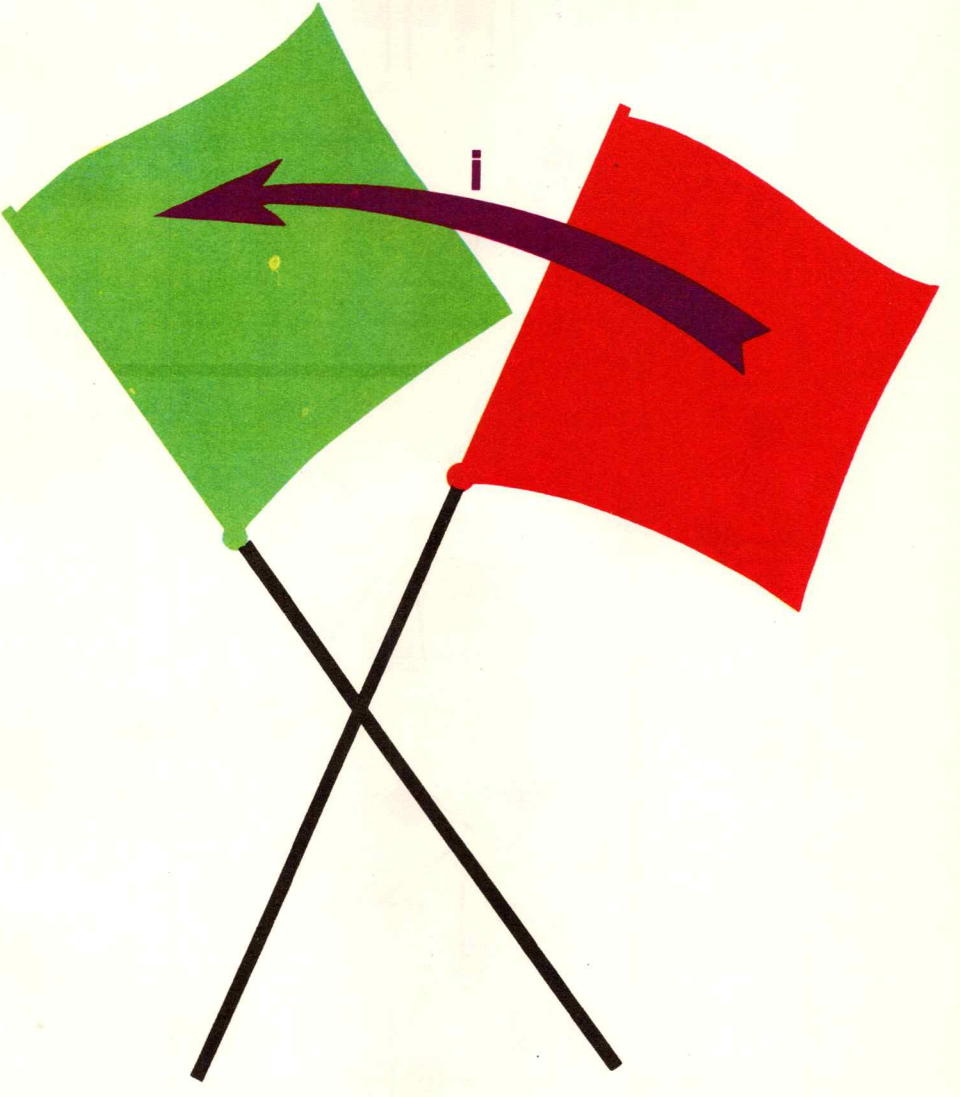
Resultará cómodo representar la cupla formada por la **semirrecta** $\overline{A}$ y uno de los **semiplanos cerrados**, por un esquema tal como el de la figura



LA SEMIRRECTA $\overline{A}$ Y EL SEMIPLANO CERRADO [A*a*

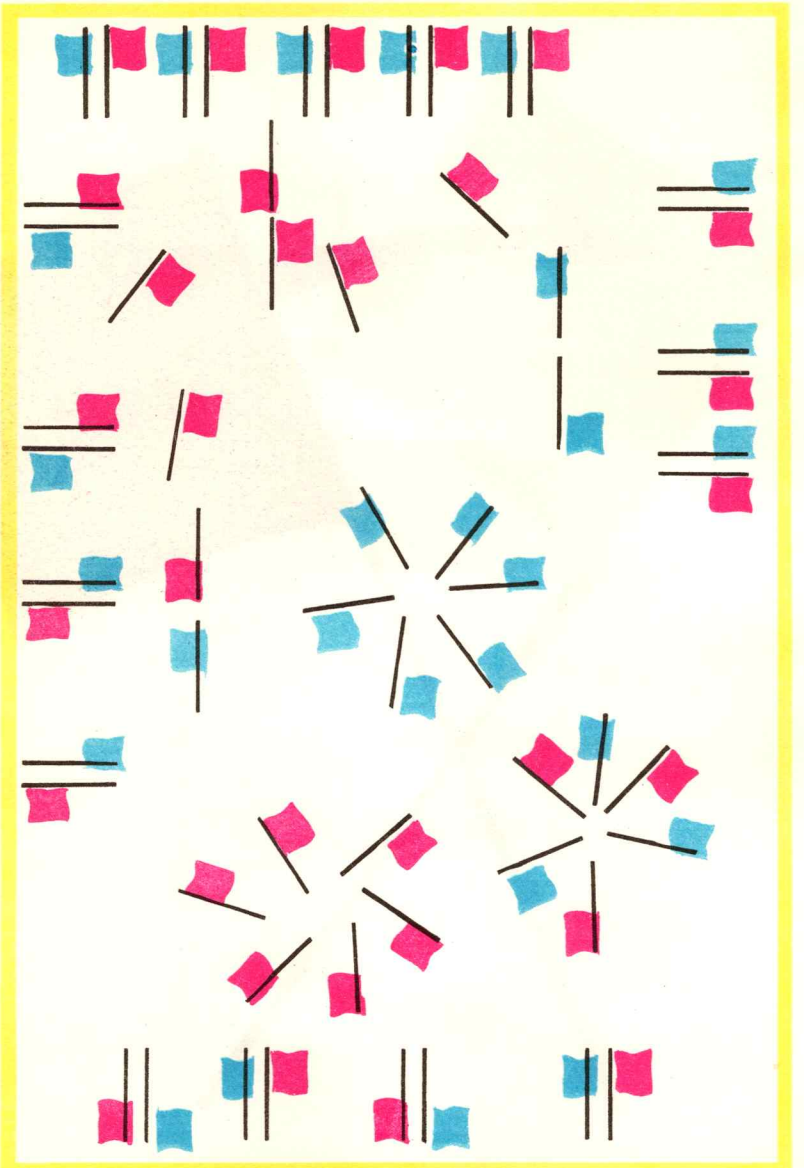
(La superficie violeta precisa el **semiplano** [A*a*)

FIG. 159



¡... y la isometría i está determinada!

FIG. 160



¡CONTEMPLA!

¡COMENTA!

¡JUSTIFICA!

FIG. 161

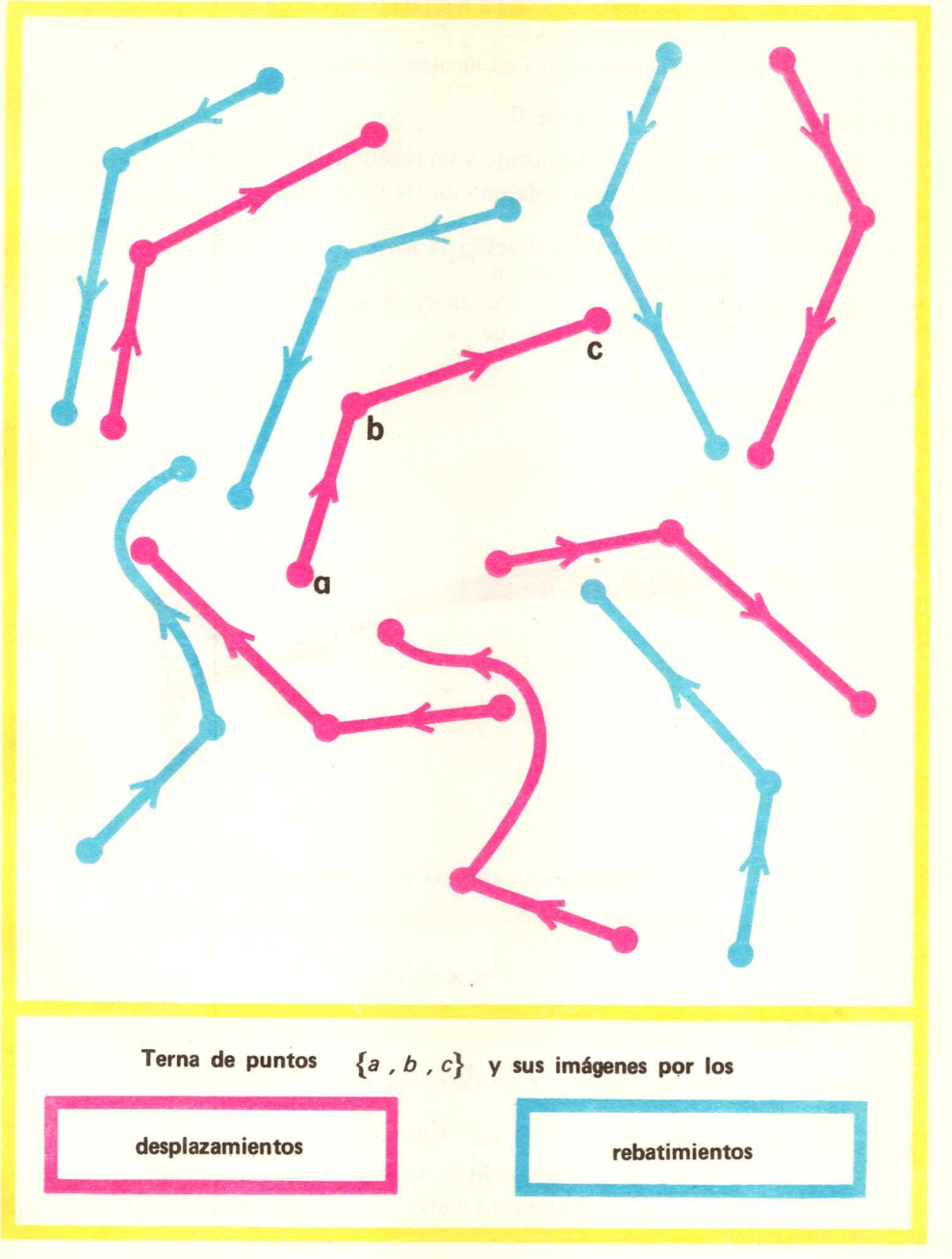

c
b
a
Terna de puntos {a , b , c} y sus imágenes por los
desplazamientos
rebatimientos

FIG. 162

EJERCICIOS

1. En la figura 160, la isometría i es un desplazamiento.

2. Tenemos dos partes A y B de Π

   Si existe un desplazamiento y un rebatimiento que aplican A sobre B
   Entonces A y B admiten cada uno un eje de simetría.

3. **Si** el desplazamiento d aplica la parte A de Π sobre B y M es un eje de B
   Entonces el rebatimiento s_M o d aplica A sobre B y d^{-1} M es un eje de A

4.

UN DESPLAZAMIENTO Y UN REBATIMIENTO

¡EXPLICA!

FIG. 163

5. El número 9 es la imagen por un desplazamiento del número 6.

6. Si tenemos los puntos a , b , x , y tales que

$$d(a, b) = d(x, y) \neq 0$$

Existe uno y sólo un desplazamiento y uno y sólo un rebatimiento que apliquen (a, b) sobre (x, y)

Existen dos desplazamientos y dos rebatimientos que apliquen $\{a, b\}$ sobre $\{x, y\}$

11 – TERNAS ISOMETRICAS

¿Cuándo diremos habitualmente que las ternas de puntos $(a\,,b\,,c)$ y $(x\,,y\,,z)$ son isométricas?

DEFINICION $\forall\, a\,,b\,,c\,,x\,,y\,,z \in \Pi$:

$(a\,,b\,,c)$ **iso** $(x\,,y\,,z)$

ssi

Existe una isometría f tal que $f(a) = x\ ,\ f(b) = y\ ,\ f(c) = z$

PROPOSICION

$(a\,,b\,,c)$ iso $(x\,,y\,,z)$

ssi

$d(a\,,b) = d(x\,,y)\ ;\ d(b\,,c) = d(y\,,z)\ ;\ d(a\,,c) = d(x\,,z)$

Si $(a\,,b\,,c)$ iso $(x\,,y\,,z)$

Entonces $(a\,,b)$ iso $(x\,,y)$; $(b\,,c)$ iso $(y\,,z)$; $(a\,,c)$ iso $(x\,,z)$

de donde $d(a\,,b) = d(x\,,y)\ ;\ d(b\,,c) = d(y\,,z)\ ;\ d(a\,,c) = d(x\,,z)$

Faltaría probar :

Si $d(a\,,b) = d(x\,,y)\ ;\ d(b\,,c) = d(y\,,z)\ ;\ d(a\,,c) = d(x\,,z)$

Entonces $(a\,,b\,,c)$ iso $(x\,,y\,,z)$

DEMOSTRACION :

Si dos de los puntos de la terna $(a\,,b\,,c)$ son iguales,

Entonces los correspondientes de la terna $(x\,,y\,,z)$ también son iguales

. . . y la proposición por demostrar es evidente.

Supongamos que $a\,,b\,,c$ sean distintos dos a dos

y $x\,,y\,,z$ sean también distintos dos a dos.

1. $a\,,b\,,c$ *no están alineados y* $x\,,y\,,z$ *tampoco lo están.*

Existen dos isometrías que aplican $[\,a\,b$ sobre $[\,x\,y$

Y por ser $d(a\,,b) = d(x\,,y)$, ellas aplican a sobre x y b sobre y

Estas dos isometrías aplican $]a\,b\,.\,c$ sobre cada uno de los dos semiplanos abiertos de borde $x\,y$ (§ 10).

Llamemos f a la que aplica $]a\,b\,.\,c$ sobre el semiplano abierto de borde $x\,y$ que no comprende a z

De ahí se deduce la situación de la figura

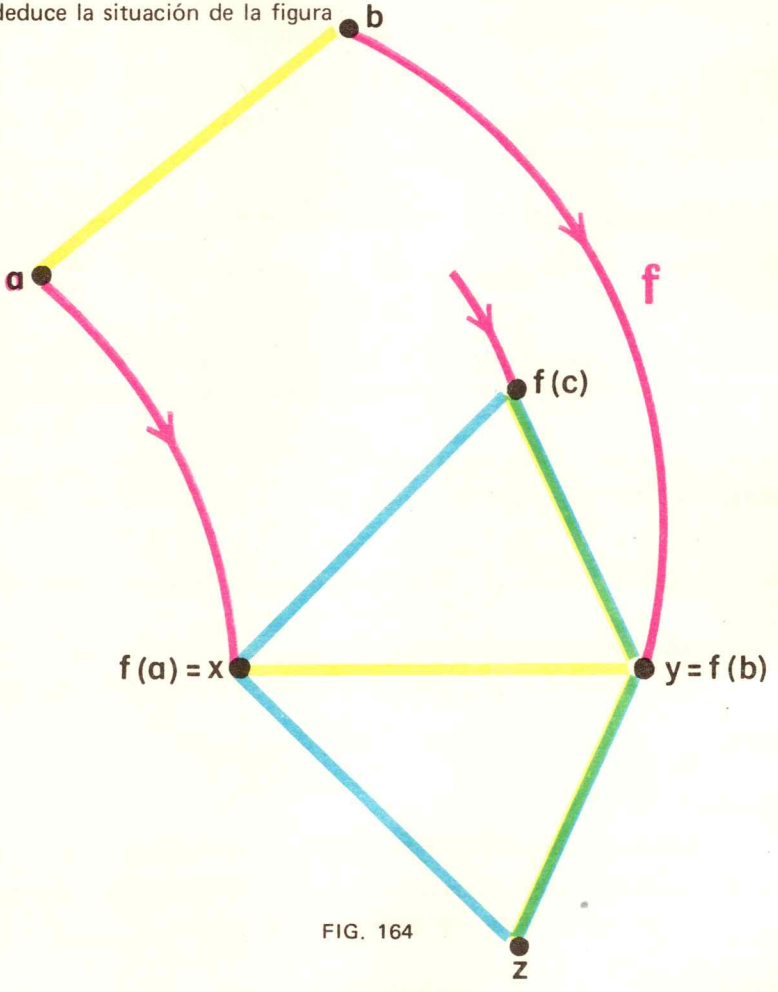


FIG. 164

$$d(x\,,y) = d(a\,,c) \qquad \text{(por hipótesis)}$$

$$d(a\,,c) = d\Big(x\,,f(c)\Big) \qquad (f \text{ es una isometría})$$

Luego $d(x\,,z) = d\Big(x\,,f(c)\Big)$

Igualmente $d(y\,,z) = d\Big(y\,,f(c)\Big)$

$\Big\}\Longrightarrow xy$ es la mediatriz de $\{z\,,f(c)\}$

La simetría s de eje xy aplica $\big(x, y, f(c)\big)$ sobre (x, y, z)
La isometría f aplica (a, b, c) sobre $\big(x, y, f(c)\big)$
La isometría $s \circ f$ aplica (a, b, c) sobre (x, y, z)

2. Falta considerar el caso en que se sabe que una de las ternas está alineada.
Para fijar ideas supongamos alineada la terna (a, b, c).
Llamemos f a una isometría que aplica (a, b) sobre (x, y)

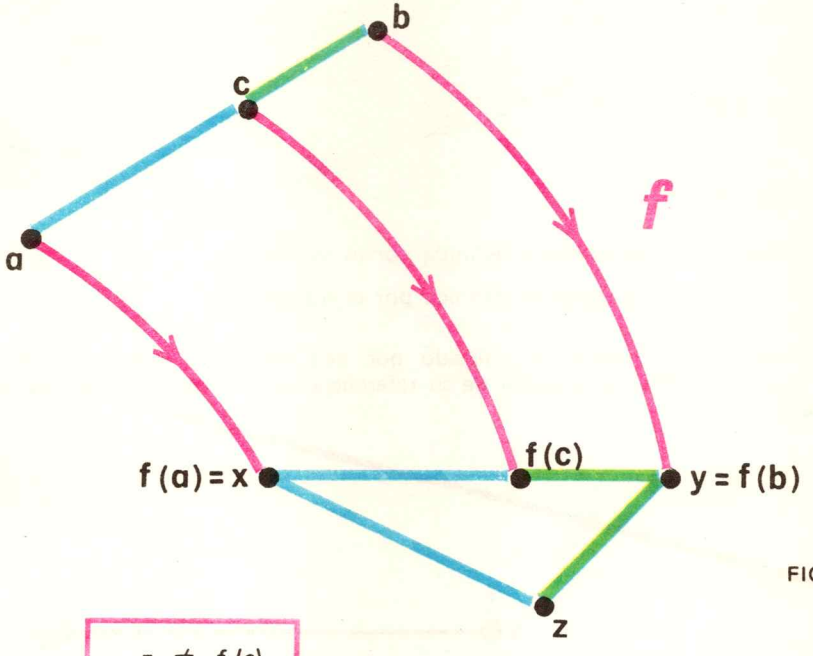


FIG. 165

Si $z \neq f(c)$

Entonces xy es la mediatriz de $\{ z, f(c) \}$
$f(c)$ es el punto de intersección de esta mediatriz y del segmento $[z, f(c)]$
$f(c)$ es el punto medio de $\{ z, f(c) \}$

. . . lo cual es absurdo

Por tanto $z = f(c)$

y la isometría f aplica (a, b, c) sobre (x, y, z)

l.q.q.d.

12 – CAMBIO DE METRO Y DE DISTANCIA

He aquí un metro rojo y un metro azul.

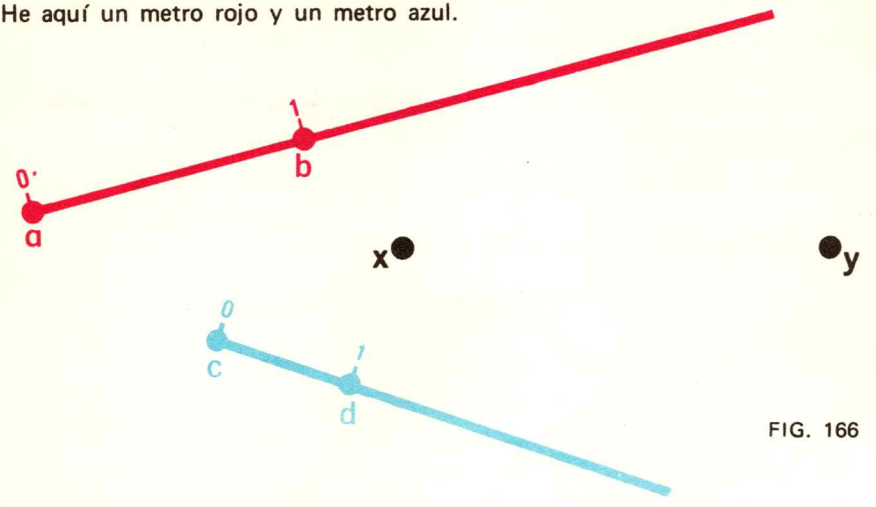
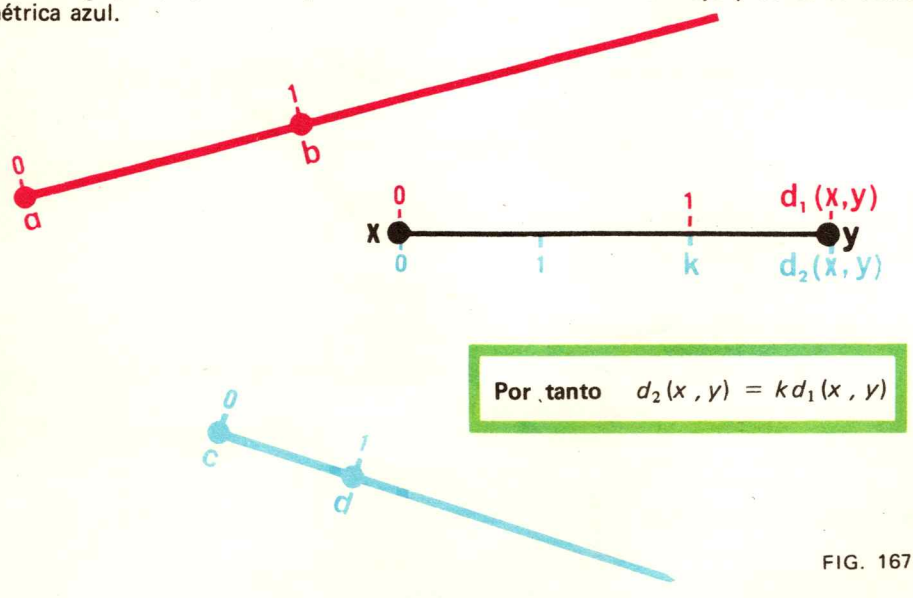


FIG. 166

Llamemos d_1 a la distancia definida por el metro rojo;

d_2 a la distancia definida por el metro azul.

Cada uno de los metros es aplicado por una isometría sobre la semirrecta cerrada $[x\,y$ y queda así provista de su referencia métrica roja y de su referencia métrica azul.



Por tanto $d_2(x\,,\,y) = k\,d_1(x\,,\,y)$

FIG. 167

El real positivo k es la **distancia** $d_2\ (a\,,\,b)$ o la **longitud** (azul) de $[\,a\,b\,]$

CONCLUSION

Si *d_1 y d_2 son las distancias definidas por el metro rojo y por el metro azul*

Entonces *existe un número real estrictamente positivo k tal que*

$$\forall (x, y) \in \Pi \times \Pi : d_2(x, y) = k d_1(x, y)$$

O expresado de otro modo

Cambiar de metro

significa

Multiplicar la distancia de todas las cuplas de puntos
por un
mismo número real estrictamente positivo

Salvo indicación expresa de lo contrario, supondremos en adelante que la **unidad de longitud es siempre la misma.**

Recordemos también que

Salvo indicación contraria, todas las referencias utilizadas son métricas.

10

Circunferencias

1 – CIRCUNFERENCIAS Y CIRCULOS

He aquí $r \in \mathbf{R}^+$ y $c \in \Pi$

Toda semirrecta cerrada de origen c comprende exactamente un punto x tal que $d(c, x) = r$

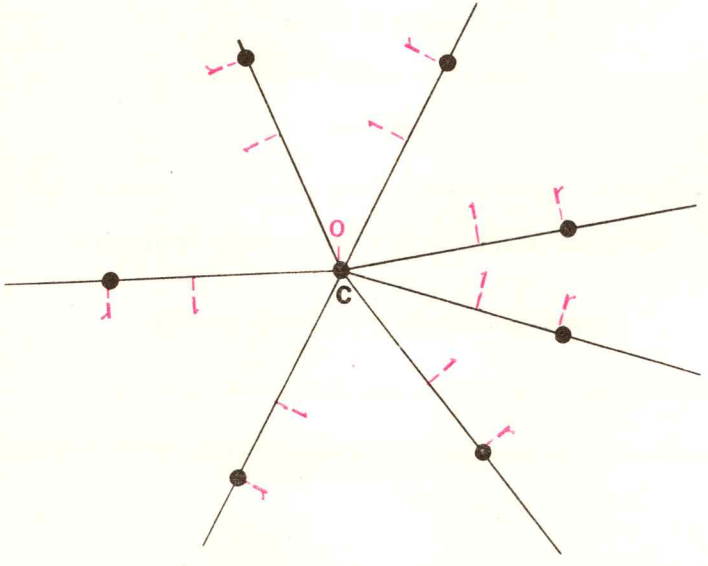


FIG. 162

Si $r > 0$ y $D \in \mathfrak{D}_c$

Entonces D comprende exactamente dos puntos cuya distancia a c sea igual a r

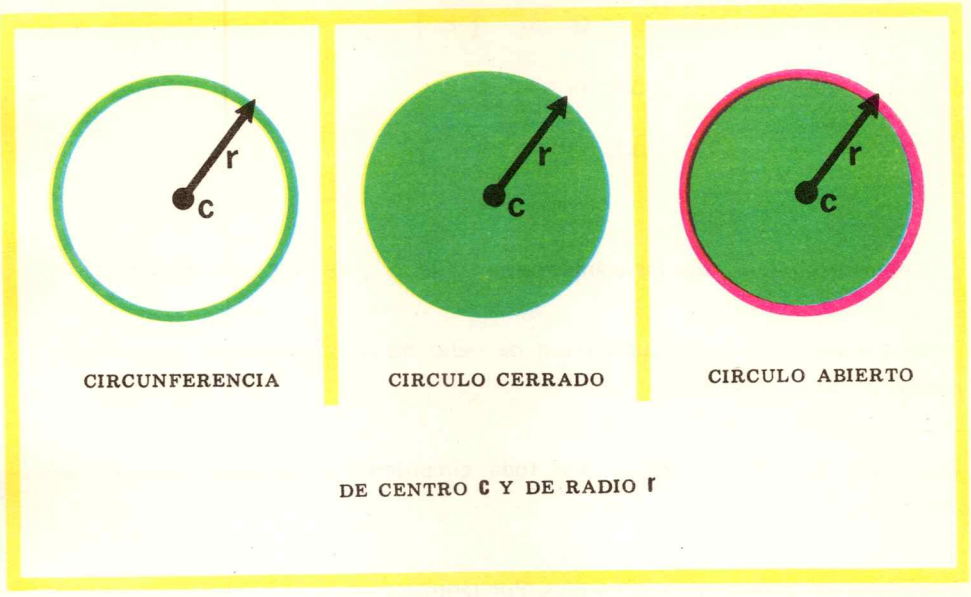


FIG. 169

DEFINICION

Para todo $c \in \Pi$ *y para todo* $r \in \mathbf{R}^+$:

$$\Gamma(c, r) = \{ x \in \Pi \mid d(c, x) = r \}$$

es la **circunferencia de centro c y de radio r**

$$\Delta(c, r) = \{ x \in \Pi \mid d(c, x) < r \}$$

es el **círculo abierto de centro c y de radio r**

$$\overline{\Delta}(c, r) = \{ x \in \Pi \mid d(c, x) \leqslant r \}$$

es el **círculo cerrado de centro c y de radio r**

$$\Gamma(c,0) = \{ c \}$$

$$\Delta(c,0) = \phi$$

$$\overline{\Delta}(c,0) = \{ c \}$$

Los elementos de $\mathfrak{D}_c$ *son los* **diámetros** *de* $\Gamma(c,r)$, *de* $\Delta(c,r)$ *y de* $\overline{\Delta}(c,r)$

Todo diámetro de una circunferencia de radio no nulo comprende exactamente dos puntos de la circunferencia.

Como $\mathfrak{D}_c$ es infinito, resulta que toda circunferencia de radio no nulo es infinita.

Las isometrías conservan las distancias. Por tanto :

Para toda $f \in \mathfrak{I}$:

$$f\Gamma(c,r) = \Gamma\big(f(c),r\big)$$

$$f\Delta(c,r) = \Delta\big(f(c),r\big)$$

$$f\overline{\Delta}(c,r) = \overline{\Delta}\big(f(c),r\big)$$

En particular la simetría central s_c y toda simetría cuyo eje comprenda a c aplican $\Gamma(c,r)$ sobre $\Gamma(c,r)$; $\Delta(c,r)$ sobre $\Delta(c,r)$; $\overline{\Delta}(c,r)$ sobre $\overline{\Delta}(c,r)$

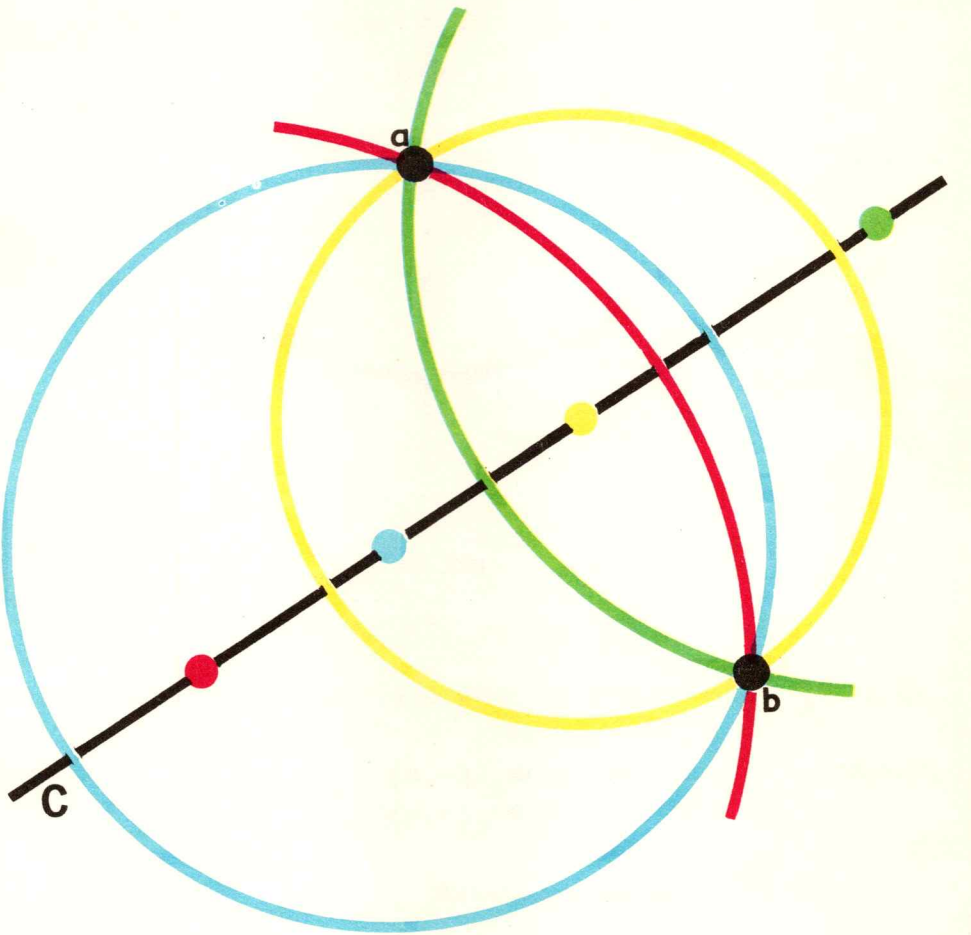
El punto c es centro de simetría de $\Gamma(c,r)$, de $\Delta(c,r)$ y de $\Gamma(c,r)$

Todo diámetro es eje de simetría de $\Gamma(c,r)$, de $\Delta(c,r)$ y de $\overline{\Delta}(c,r)$

2 – CIRCUNFERENCIAS QUE COMPRENDEN DOS PUNTOS DISTINTOS *a* Y *b*

He aquí dos puntos distintos a , b

Todo punto de la mediatriz C de $\{a, b\}$ es centro de una circunferencia que contiene a $\{a, b\}$



: LA MEDIATRIZ C DE $\{a, b\}$ ES EL CONJUNTO
DE LOS CENTROS DE LAS CIRCUNFERENCIAS QUE CONTIENEN A $\{a, b\}$

FIG. 170

- **Si** los puntos distintos a , b pertenecen a la circunferencia $\Gamma(o, r)$

  Entonces $o \in C$, mediatriz de $\{a, b\}$

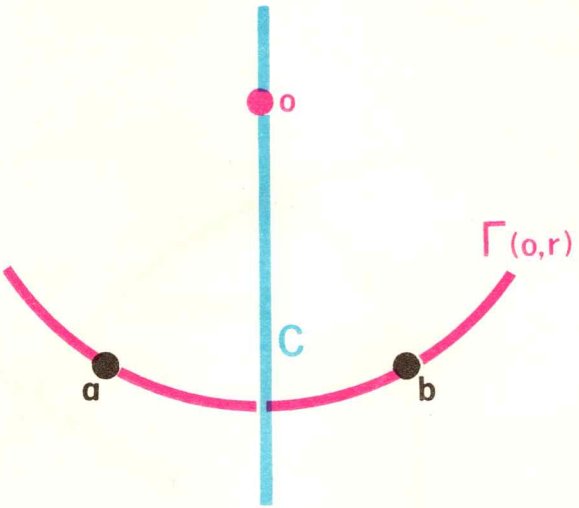


FIG. 171

- **Si** los tres puntos distintos a , b , c pertenecen a una circunferencia $\Gamma(o, r)$

Entonces $o \in C$, mediatriz de $\{a, b\}$
et $o \in A$, mediatriz de $\{b, c\}$
Por tanto $A \cap C \neq \phi$

- He aquí tres puntos **alineados distintos**

FIG. 172

Construyamos la mediatriz C de $\{ a , b \}$

la mediatriz A de $\{ b , c \}$

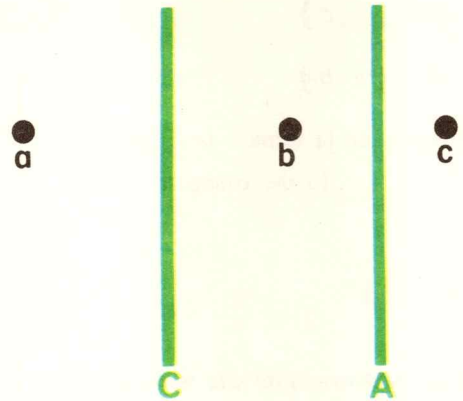


FIG. 173

$$A \cap C = \phi$$

CONCLUSION

Si *los tres puntos distintos* a , b , c *pertenecen a una* **circunferencia**

Entonces a , b , c *no están alineados*

O expresado de otro modo :

Si Γ es una circunferencia y D es una recta

Entonces $\# (\Gamma \cap D) \leqslant 2$

3 – CIRCUNFERENCIA DEFINIDA POR TRES PUNTOS NO ALINEADOS

He aquí tres puntos no alineados a, b, c

La mediatriz A de $\{b, c\}$

la mediatriz B de $\{a, c\}$

la mediatriz C de $\{a, b\}$

se denominan **mediatrices de la terna** (a, b, c)

(o del triángulo $a\,b\,c$)

PROPOSICION

La intersección de las mediatrices de una terna de puntos no alineados es un conjunto unitario.

DEMOSTRACION :

A ≠ B : indiquemos $\{o\} = A \cap B$

$o \in A \Longrightarrow$ $d(o, b) = d(o, c)$

$o \in B \Longrightarrow$ $d(o, a) = d(o, c)$

$\Downarrow$

$d(o, a) = d(o, b) \Longrightarrow o \in C$

Por tanto $A \cap B \cap C = \{o\}$

l.q.q.d.

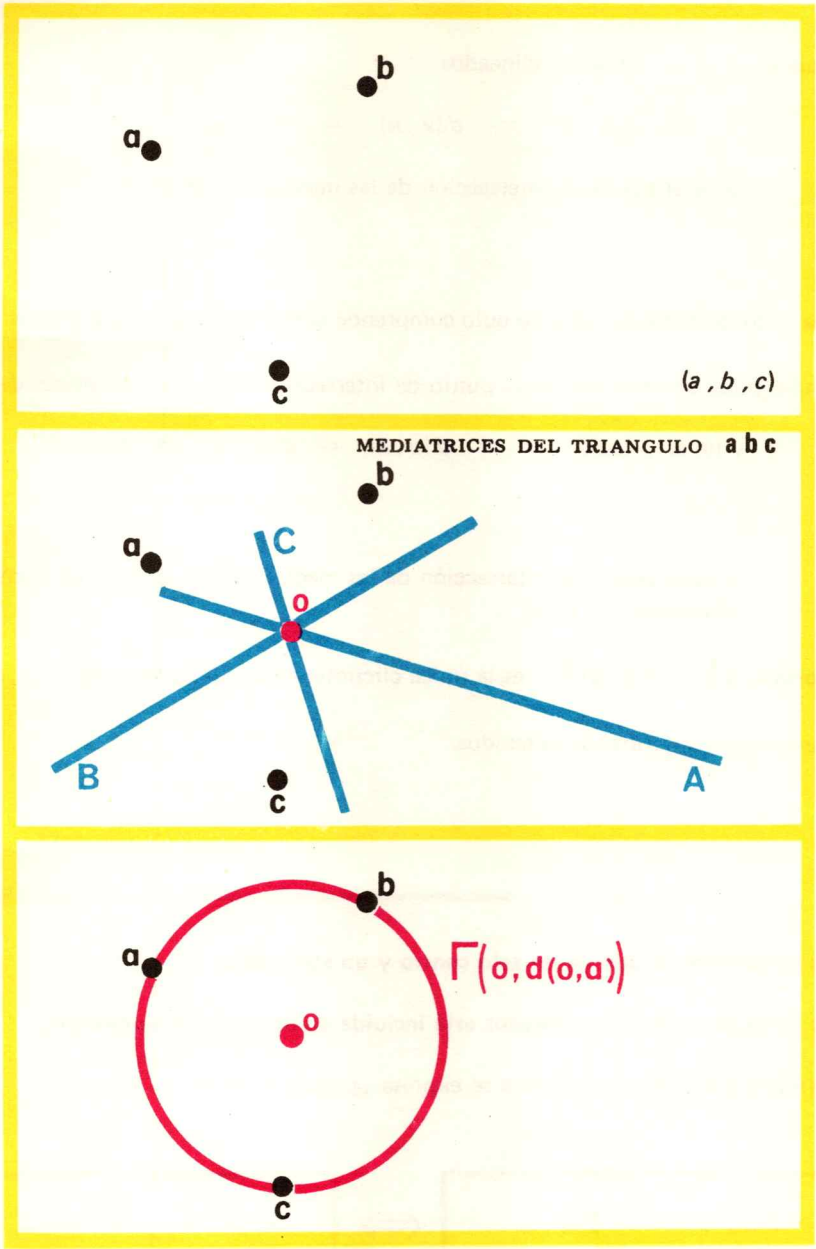


FIG. 174

- **Si** los tres puntos distintos a, b, c pertenecen a la circunferencia $\Gamma(x, r)$ (con $r \in \mathbf{R}_0^+$)

  Entonces a, b, c no están alineados (§ 2)

  $$r = d(x, a) = d(x, b) = d(x, c)$$

  x es el punto de intersección de las mediatrices de $a\,b\,c$

- Toda circunferencia de radio no nulo comprende al menos tres puntos distintos: a,b,c

  Admite, pues, un sólo centro: el punto de intersección o de las mediatrices de (a,b,c)

  y un sólo radio : $r = d(o, a) = d(o, b) = d(o, c)$

- **Si** o es el punto de intersección de las mediatrices de la terna de puntos no alineados (a, b, c)

  Entonces $\Gamma\big(o\,;\,d(o, a)\big)$ es la única circunferencia que comprende a a, b, c

Resumamos los resultados obtenidos.

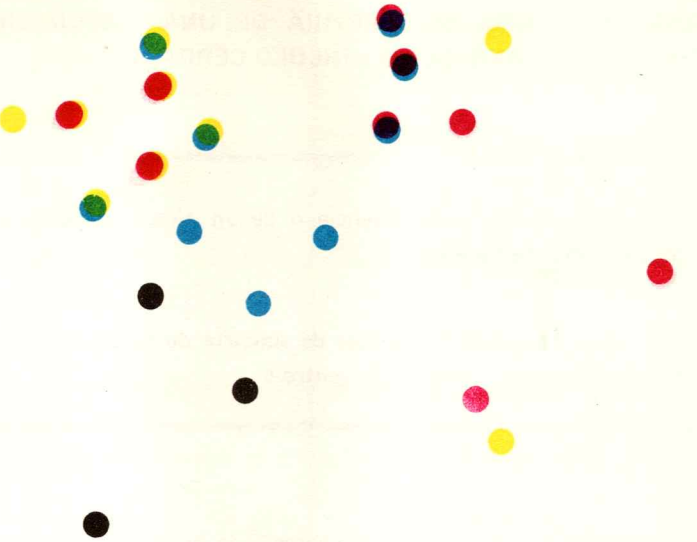
TEOREMA

Toda circunferencia admite un solo centro y un solo radio.

Toda terna de puntos no alineados está incluida en una sola circunferencia.

La primera parte de este teorema se expresa también

$$\Gamma(a, r) = \Gamma(b, s) \iff a = b \;;\; r = s$$



CONJUNTO DE TRES PUNTOS NO ALINEADOS FIG. 175

. . . Y LAS CIRCUNFERENCIAS QUE LOS CONTIENEN

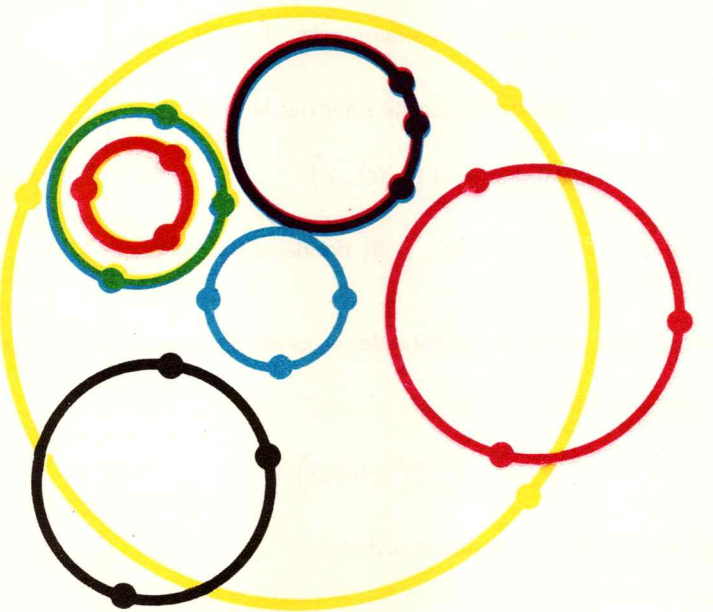


FIG. 176

4 – CENTRO Y EJES DE SIMETRIA DE UNA CIRCUNFERENCIA, DE UN CIRCULO ABIERTO, DE UN CIRCULO CERRADO

TEOREMA

1. **El centro de una circunferencia o de un círculo (abierto o cerrado) es su único centro de simetría.**

2. **$\mathfrak{D}_c$ es el conjunto de los ejes de simetría de toda circunferencia o de todo círculo (abierto o cerrado) de centro c**

Nos limitaremos a establecer el teorema en el caso de la circunferencia, ya que el razonamiento es idéntico para los círculos (abiertos o cerrados).

DEMOSTRACION :

1. Sabemos ya que c es el centro de simetría de $\Gamma(c, r)$

Supongamos que a sea otro centro de simetría de $\Gamma(c, r)$

$$\Gamma(c, r) = s_a\,\Gamma(c, r) = \Gamma\big(s_a(c), r\big)$$

Por consiguiente $c = s_a(c)$ de donde se deduce que $a = c$

2. Sabemos que toda recta que comprende c es eje de simetría de $\Gamma(c, r)$

Sea A eje de simetría de $\Gamma(c, r)$

$$\Gamma(c, r) = s_A\,\Gamma(c, r) = \Gamma\big(s_A(c), r\big)$$

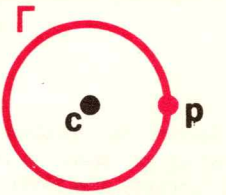
Por tanto $c = s_A(c)$ de donde se deduce $c \in A$ y $A \in \mathfrak{D}_c$

l.q.q.d.

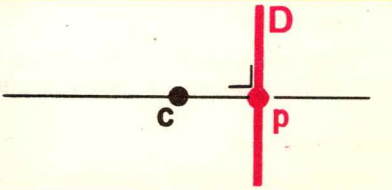
5 – TANGENTE

PROPOSICION

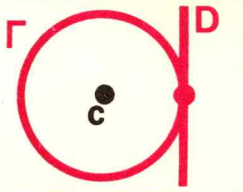
He aquí la circunferencia Γ *de centro c y de radio no nulo, que comprende al punto p*



Si *D es la perpendicular a pc que comprende a p*



Entonces $D \cap \Gamma = \{p\}$



DEMOSTRACION : FIG. 177

$$p \in \Gamma \cap D$$

Llamemos s a la simetría de eje cp

cp es un eje de Γ : $s\,\Gamma = \Gamma$

$D \perp$ eje de s : $s\,D = D$

Supongamos $x \in \Gamma \cap D$ de donde se deduce que $s(x) \in \Gamma \cap D$

Si $x \neq p$ **Entonces** Los tres puntos alineados distintos $x, p, s(x)$ pertenecen a Γ, lo cual es imposible.

Luego $x = p$

O expresado de otro modo, $\Gamma \cap D$ es un conjunto unitario.

l.q.q.d.

DEFINICION

La recta D es **tangente** *a la circunferencia* Γ *en el punto* $p \in \Gamma$

ssi

$$D \cap \Gamma = \{ p \}$$

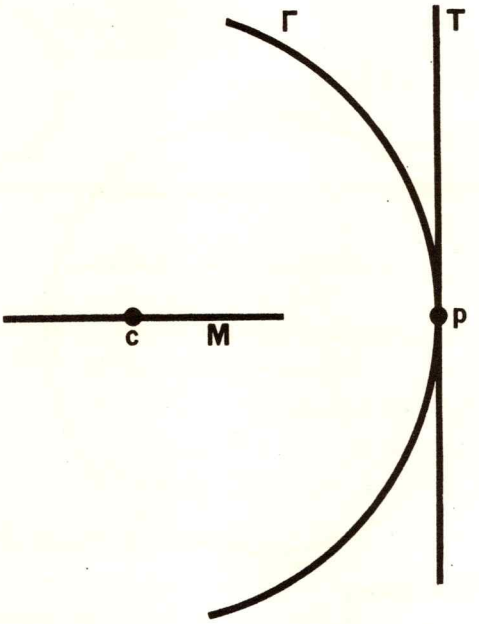
Acabamos de establecer que toda recta que comprende un punto de una circunferencia de radio no nulo y es perpendicular al diámetro que comprende dicho punto, es tangente a la circunferencia en dicho punto.

PROPOSICION

Toda tangente T *en el punto p de la circunferencia* Γ *de centro c y de radio no nulo, es perpendicular al diámetro c p*

DEMOSTRACION :

Llamemos M a la perpendicular a T que comprende *c*



c $\in$ **M** $\perp$ **T** FIG. 178

El diámetro M es un eje de Γ : $s_M\ \Gamma = \Gamma$

La recta T es perpendicular a M : $s_M\ T = T$

Ahora bien $\{ p \} = \Gamma \cap T$

$s_M\ (p) = \Gamma \cap T = \{ p \}$

$s_M\ (p) = p$

$p \in M$ l.q.q.d.

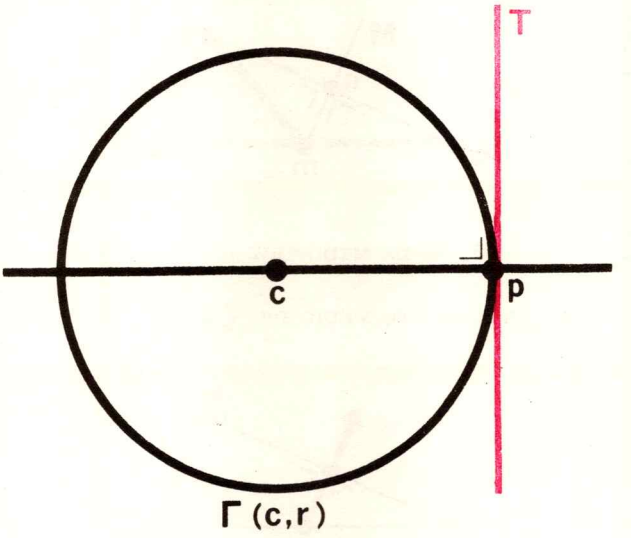
Para las circunferencias de radio nulo : tangente = diámetro

. . . lo que regula el problema de las tangentes en ese caso.

Para las circunferencias de radio no nulo las dos proposiciones anteriores determinan el siguiente

TEOREMA

Todo punto de una circunferencia de radio no nulo pertenece a una y a sólo una tangente, la cual es perpendicular al diámetro que comprende dicho punto.



LA TANGENTE T EN EL PUNTO p

FIG. 179

6 – PERPENDICULARIDAD Y CIRCUNFERENCIA

TEOREMA

He aquí tres puntos distintos **a , b , c**

$ab \perp ac$ $\Longleftrightarrow$ $\{a, b, c\}$ está incluido en la circunferencia cuyo centro es el punto medio m de $\{b, c\}$

DEMOSTRACION DE $\Longleftarrow$

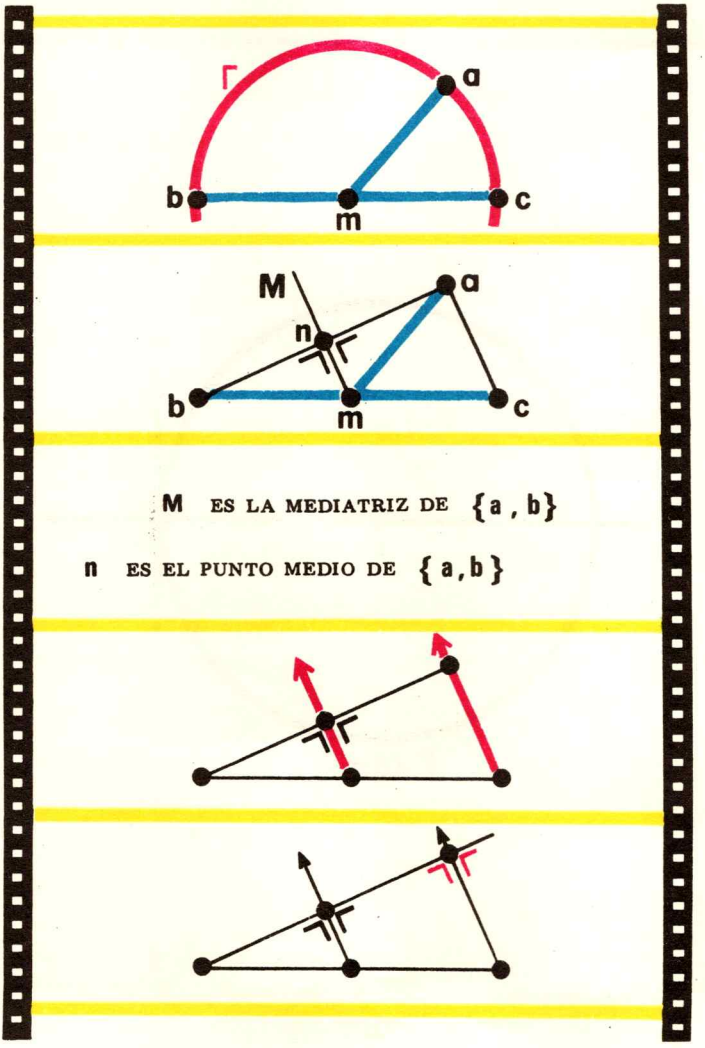


FIG. 180

l.q.q.d.

DEMOSTRACION DE $\Longrightarrow$

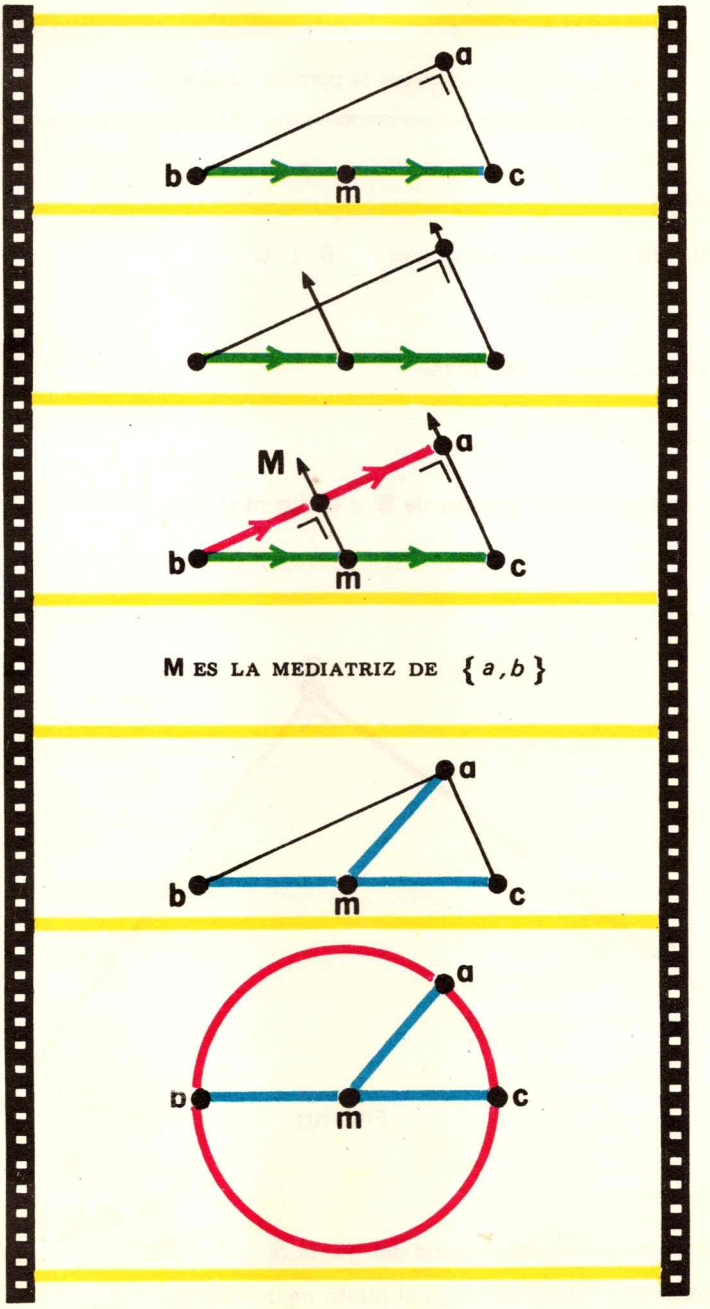


FIG. 181

l.q.q.d.

7 – LAS ISOMETRIAS CONSERVAN LA PERPENDICULARIDAD

TEOREMA

Toda isometría conserva la perpendicularidad.

DEMOSTRACION :

Tenemos dos rectas perpendiculares : $B \perp C$

y una isometría f

Se debe probar que $fB \perp fC$

Hagamos $\{a\} = B \cap C$

Llamemos b y c a dos puntos de B y C distintos de a

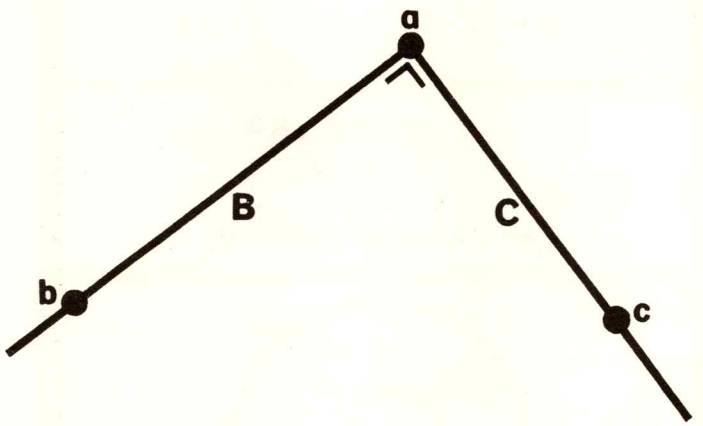


FIG. 182

$ba \perp ac$

Por tanto, en virtud del teorema del §6, la terna $\{a, b, c\}$ está incluida en una circunferencia Γ cuyo centro es el punto medio m de $\{b, c\}$

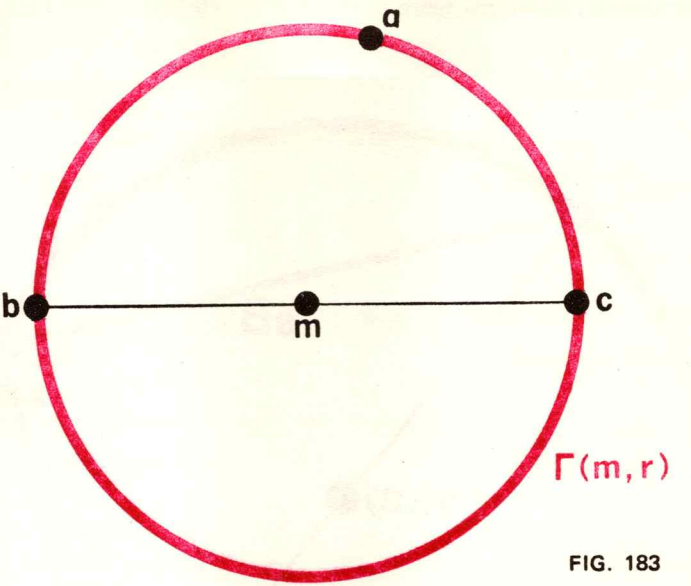


FIG. 183

$$s\,\Gamma(m,r) = \Gamma\big(s(m),r\big)$$

$$\{a,b,c\} \subset \Gamma(m,r) \Longrightarrow \{s(a),s(b),s(c)\} \subset \Gamma\big(s(m),r\big)$$

m punto medio de $\{b,c\}$ $\Longrightarrow$ $s(m)$ punto medio de $\{s(b),s(c)\}$

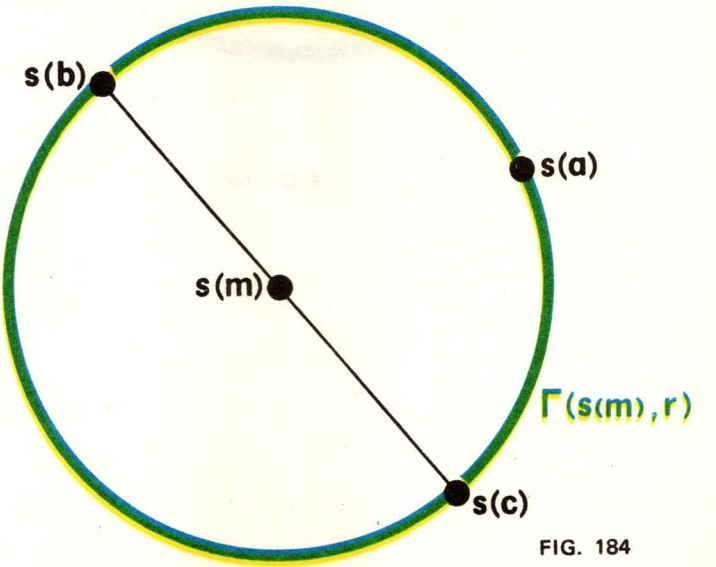


FIG. 184

Y entonces en virtud del teorema del § 6 : $s(b)\,s(a) \perp s(a)\,s(c)$

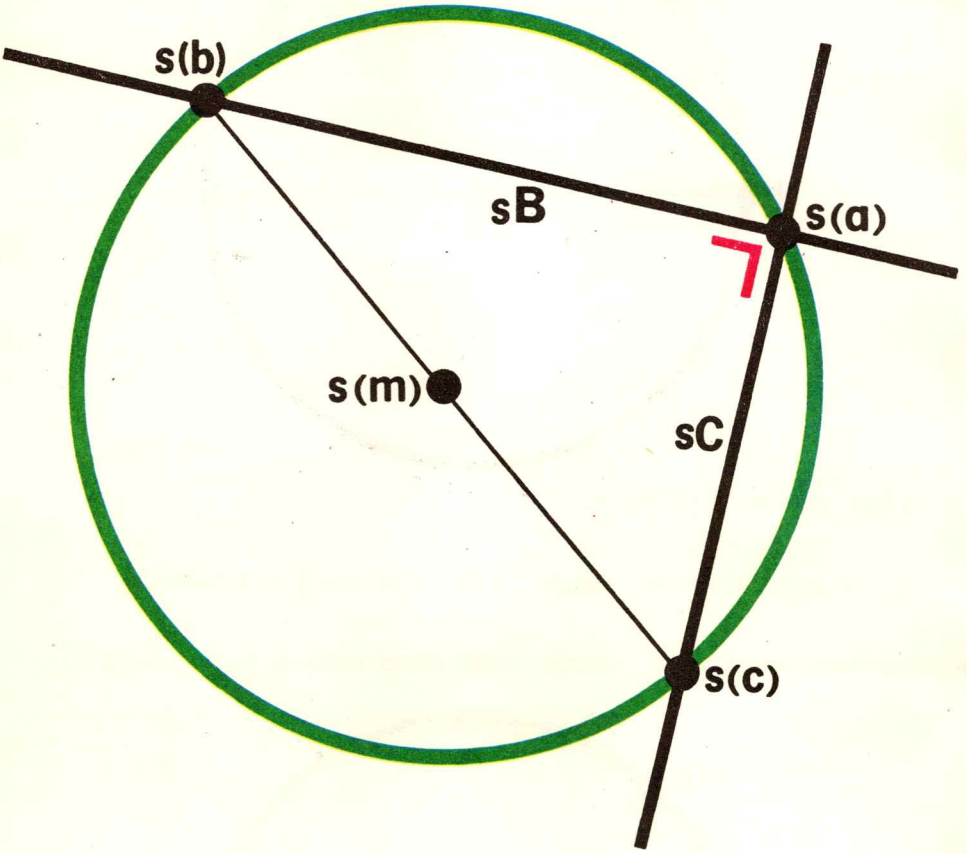


FIG. 185

Es decir $s\,B \perp s\,C$

l.q.q.d.

8 – DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA

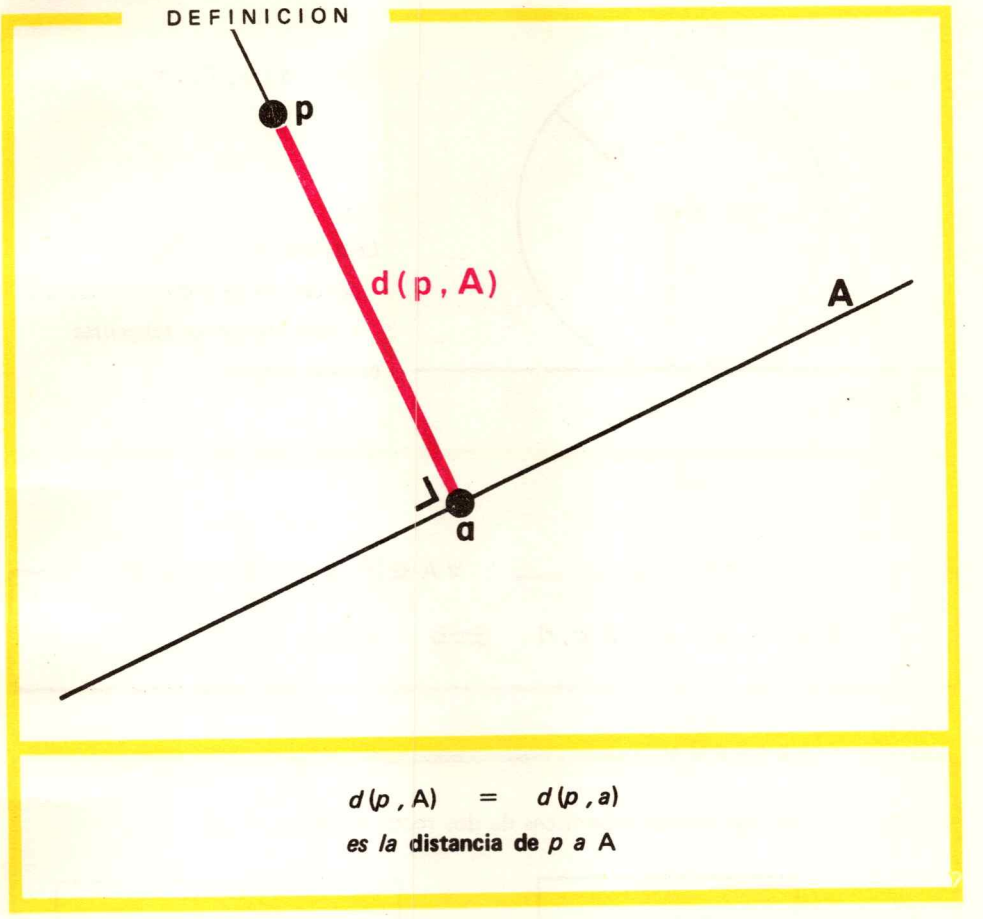
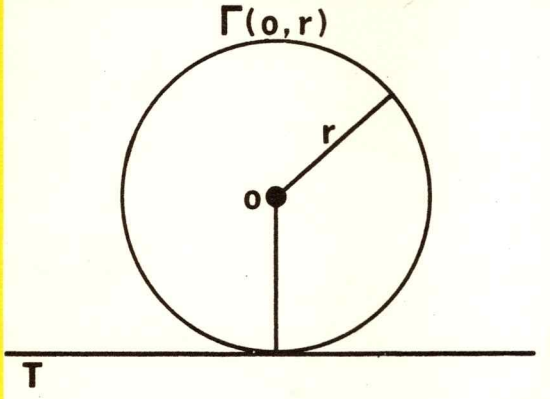


FIG. 186

La distancia $d(p, A) = d(p, a)$ es la distancia de p a un punto bien determinado de D

Se demostrará en (12.6) que $d(p, A) = d(p, a)$ es la menor distancia $d(p, x)$ con $x \in A$

En virtud del teorema del § 5 :



$d(o,T) = r$

La distancia del centro de una circunferencia a cada una de sus tangentes **es igual al** *radio.*

FIG. 187

PROPOSICION $\forall A \in \mathfrak{D}, \forall c \in \Pi, \forall r \in \mathbb{R}^+$

A es tangente a $\Gamma(c,r) \iff d(c,A) = r$

TEOREMA

Si M , N son las bisectrices de dos rectas secantes A , B

Entonces $x \in M \cup N \iff d(x,A) = d(x,B)$

$\updownarrow$ $\updownarrow$

x es el centro de una circunferencia tangente a A y B

Teniendo en cuenta la proposición anterior

bastará probar $\Longleftrightarrow$

DEMOSTRACION DE $\Longrightarrow$

Sea $x \in M$

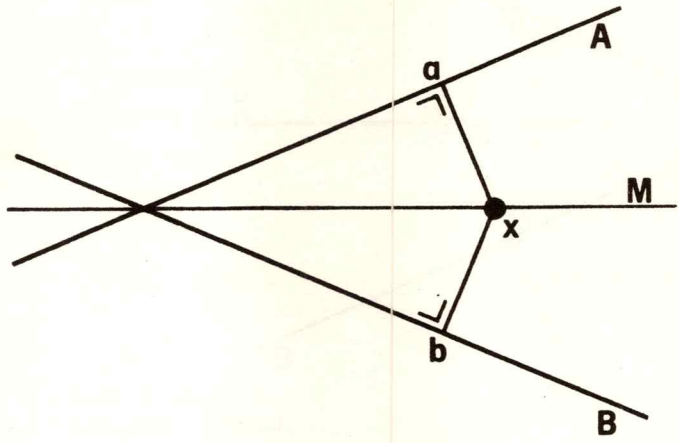


FIG. 188

La simetría s_M aplica

A sobre B (M es bisectriz de (A , B))

x sobre x

$x\,a$ sobre $x\,b$ (la simetría respeta la perpendicularidad)

a sobre b

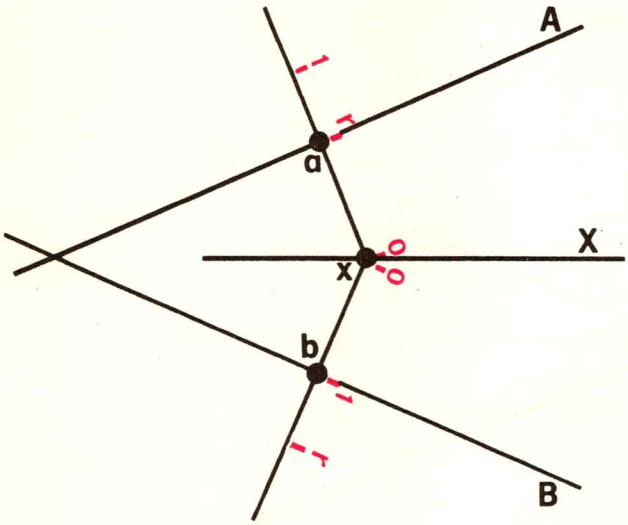
$(x\,,a)$ sobre $(x\,,b)$

Por tanto $(x\,,a)$ iso $(x\,,b)$ de donde $d(x\,,a) = d(x\,,b$

$d(x\,,A) = d(x\,,B)$

DEMOSTRACION DE $\Longleftarrow$

Sea x tal que $d(x, A) = d(x, B)$



Luego : $d(x, a) = d(x, b)$

FIG. 189

Llamemos X a la bisectriz de $\left(\left[x\,a\,, \left[x\,b\right)\right.\right.$

La simetría s_X aplica

$[\ x\,a$ *sobre* $[\ x\,b$

La referencia métrica (roja) de $[\ x\,a$ sobre la (roja) de $[\ x\,b$

a sobre b (porque la simetría respeta las abscisas)

A sobre B (porque la simetría respeta la perpendicularidad)

Por tanto X es una de las bisectrices de la cupla (A , B)

x pertenece a una de las bisectrices de (A , B)

l.q.q.d.

9 – EJERCICIOS

1. He aquí dos rectas paralelas diferentes $A \parallel B$

¿Cuál es el conjunto de puntos tales que su distnacia a A

iguale a su distancia a B?

2. He aquí las tres rectas paralelas A , B , C distintas dos a dos.

El conjunto de puntos p tales que

$$d(p, A) = d(p, B) = d(p, C)$$

es un conjunto vacío.

3. He aquí tres rectas distintas $A , B , C \in \mathfrak{D}_o$

$\{o\}$ es el conjunto de puntos cuyas distancias a A , B , C son iguales.

4. Todo desplazamiento que aplica una recta sobre una recta secante es una rotación.

5. He aquí tres rectas A , B , C secantes dos a dos.
Llamemos M a una de las bisectrices de (A , B)

Llamemos N a una de las bisectrices de (B , C)

¿Cuál es la imagen de A por s_N o s_M?

La compuesta s_N o s_M es una rotación.

Las rectas M y N son secantes.

DEFINICION

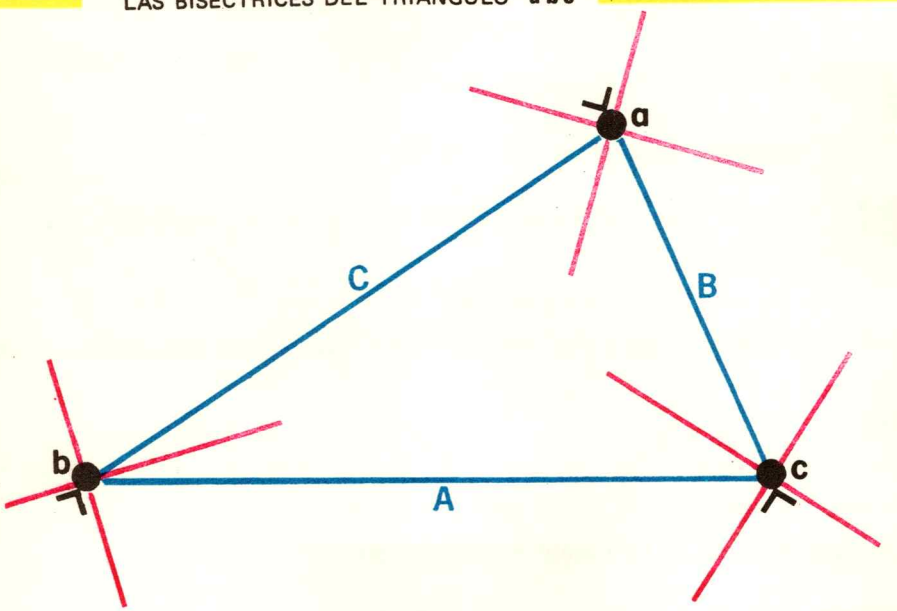
He aquí un **triángulo** *a b c*

es decir, *tres puntos no alineados* *a , b , c*

tres rectas secantes dos a dos A = *b c* , B = *c a* , C = *a b*

Las **bisectrices** de (A , B) , de (B , C) y de (C , A) se denominan **bisectrices del triángulo** *a b c*

LAS BISECTRICES DEL TRIANGULO **a b c**



¿Cómo se cortan las bisectrices de un triángulo

FIG. 190

6. En el triángulo $a\ b\ c$

Toda bisectriz comprende un sólo vértice.

7. En el triángulo $a\ b\ c$

toda bisectriz que comprende a a

corta

a toda bisectriz que comprende a b

(consecuencia inmediata del ejercicio 5)

8. Dibuja

en verde: las bisectrices que comprenden a a
en azul: las bisectrices que comprenden a b
} del triángulo $a\ b\ c$

En virtud del ejercicio 7, se tiene la situación

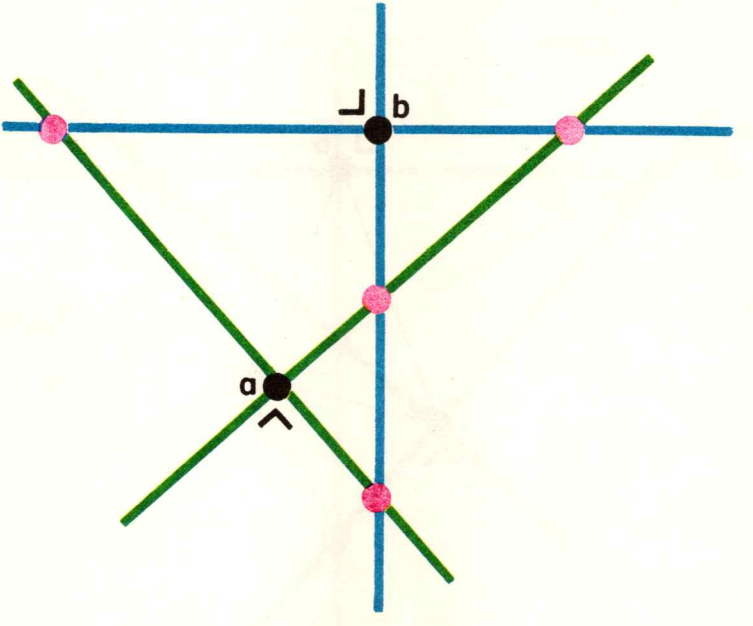
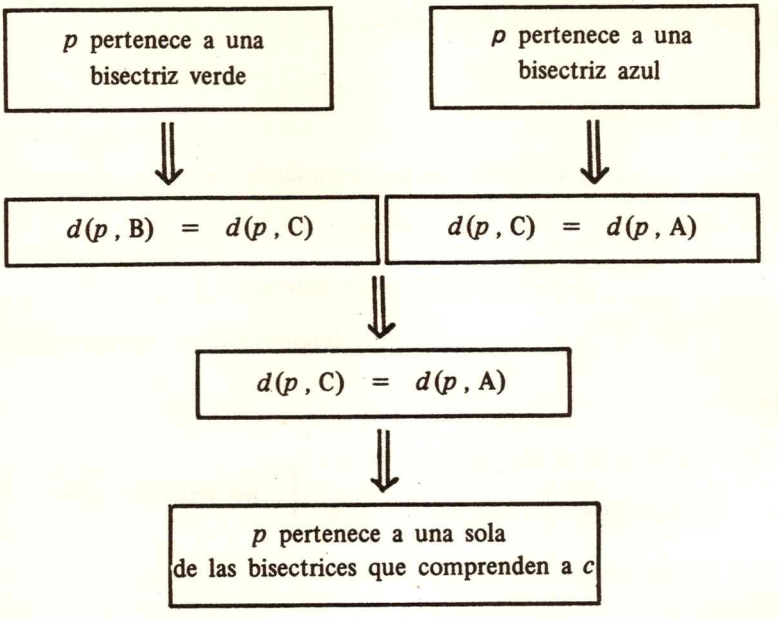


FIG. 191

Llama **p** *a uno de los puntos rojos*



Los cuatro puntos rojos pertenecen cada uno a la reunión de bisectrices (amarillas) que comprenden a *c*

Y hay una sola posibilidad:

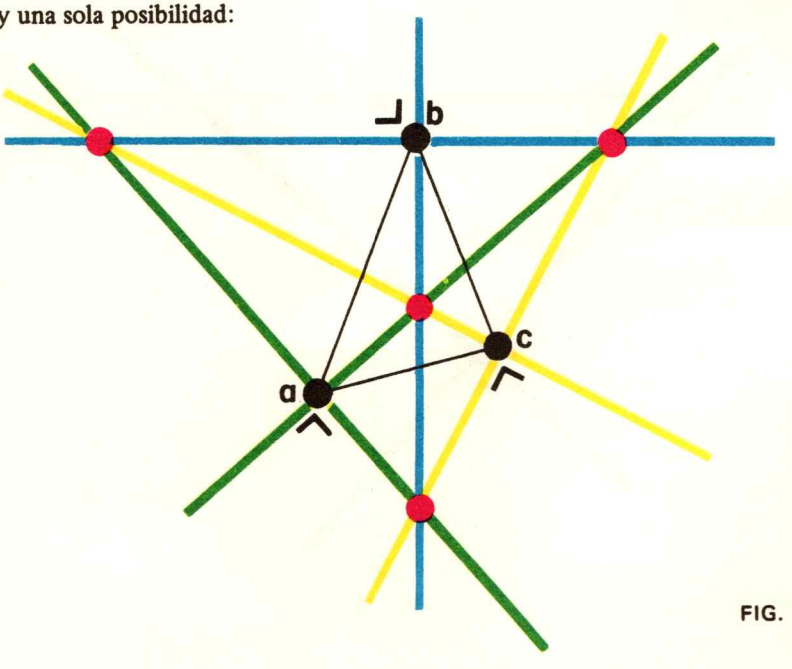


FIG. 192

9. He aquí tres rectas A , B , C secantes dos a dos.

Existen exactamente cuatro puntos distintos tales que

$$d(p, A) = d(p, B) = d(p, C)$$

Cada uno de estos cuatro puntos es el ortocentro del triángulo que tiene a los otros tres por vértices.

Existen cuatro circunferencias tangentes a la vez a A , B y C

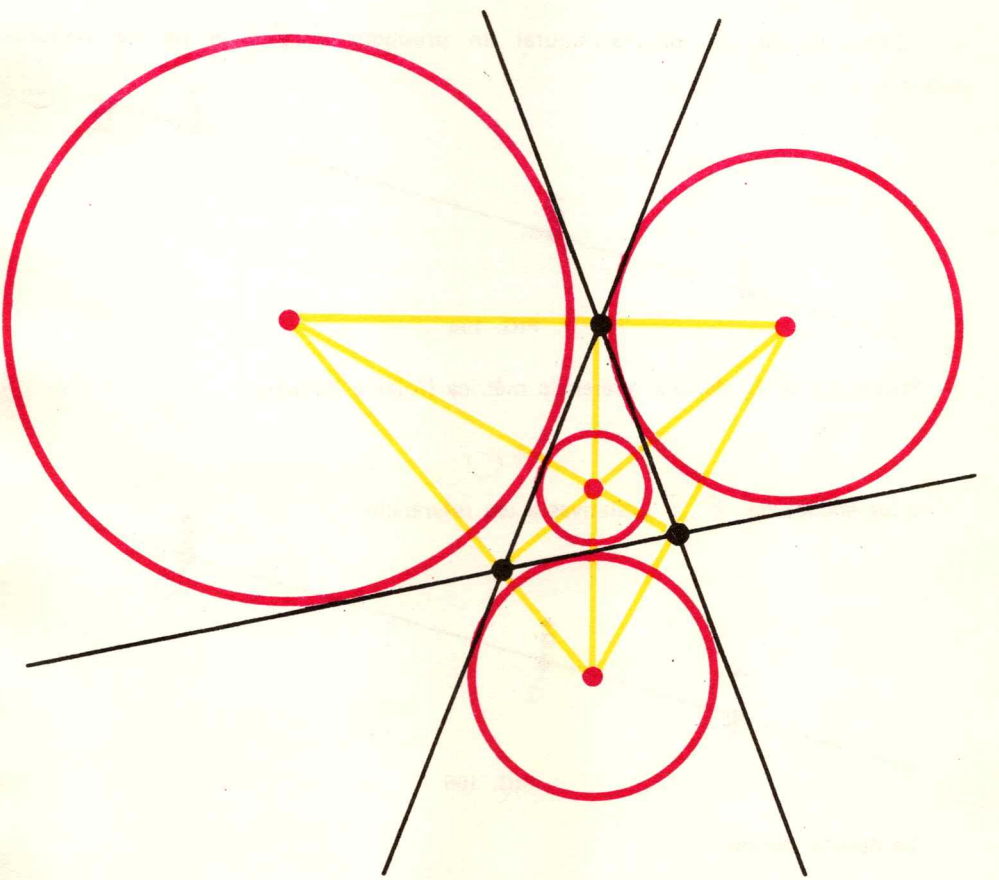


FIG. 193

11

Producto escalar

1 – PRODUCTO ESCALAR DE VECTORES PARALELOS

– ¿Cómo definir de manera natural un **producto** $\vec{x} \cdot \vec{y} \in \mathbf{R}$ de los vectores paralelos $\vec{x}, \vec{y}$

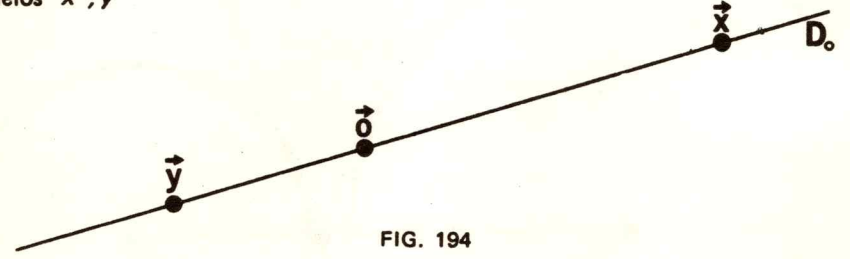


FIG. 194

– Proveamos a D_o de una referencia métrica (roja) y llamemos

$$x, y$$

a las abcisas de $\vec{x}, \vec{y}$ relativas a esa referencia

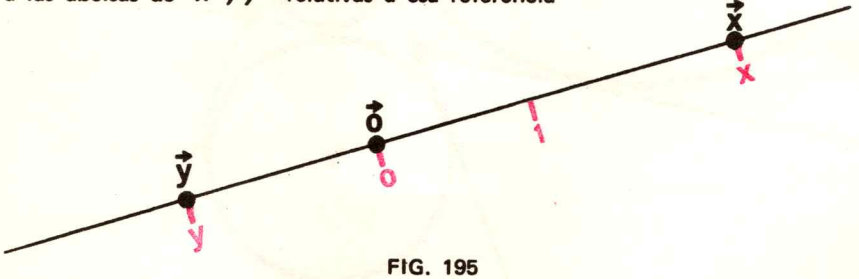


FIG. 195

Es natural definir

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x \cdot y$$

— Existen dos referencias métricas de la recta D_o

¿La definición dependerá de la referencia elegida?

— Representemos en azul la segunda referencia métrica y anotemos

$$x\,;\ y$$

Las abcisas de $\vec{x}$, $\vec{y}$ relativas a dicha referencia azul

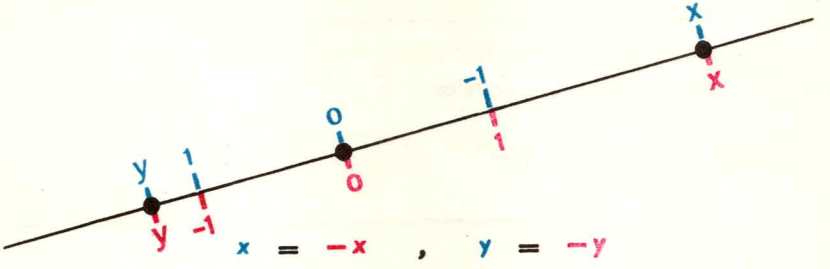


FIG. 196

Por tanto

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x \cdot y = x \cdot y$$

El producto definido no depende de la elección de la referencia métrica.

DEFINICION

Si $\vec{x}$, $\vec{y}$ *pertenecen a la misma recta vectorial* D_o

Entonces *el producto de las abscisas de* $\vec{x}$ *y de* $\vec{y}$ *, relativas a una referencia métrica de* D_o *se denomina* **producto escalar** *de* $\vec{x}$, $\vec{y}$ *y se anota* $\vec{x} \cdot \vec{y}$

El producto escalar de vectores paralelos es conmutativo.

Es igual al producto de las longitudes de estos vectores y dicho producto cambiará de signo según que los vectores tengan, o no, el mismo sentido.

Los vectores paralelos $\vec{x}$, $\vec{y}$ *tienen el mismo sentido :* $\vec{x} \cdot \vec{y} = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$

Los vectores paralelos $\vec{x}$, $\vec{y}$ *tienen sentidos opuestos :* $\vec{x} \cdot \vec{y} = -\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$

Para toda cupla de vectores **paralelos** $\vec{x}$, $\vec{y}$

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = 0 \iff \vec{x} = \vec{o} \quad \text{ó} \quad \vec{y} = \vec{o}$$

El **cuadrado escalar** $\vec{x}^2 = \vec{x} \cdot \vec{x}$ de todo vector, es igual al cuadrado de su longitud.

$$\forall\, \vec{x} \in \Pi_o : \quad \vec{x}^2 = \|\vec{x}\|^2 \quad ; \quad \vec{o}^2 = 0$$

El cuadrado escalar del vector nulo es nulo.

El **cuadrado escalar** *de todo vector no nulo es* **estrictamente positivo.**

O expresado de otro modo

$$\forall\, \vec{x} \in \Pi_o :$$

$$\vec{x}^2 \geqslant 0 \quad \text{y} \quad \vec{x}^2 = 0 \iff \vec{x} = \vec{o}$$

2 – BILINEALIDAD DEL PRODUCTO ESCALAR DE VECTORES PARALELOS

PROPOSICION

Si *los vectores* $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ *son paralelos y* $a, b \in \mathbf{R}$

Entonces
$$\vec{x} \cdot (a\vec{y} + b\vec{z}) = a \cdot \vec{x}\vec{y} + b \cdot \vec{x}\vec{z}$$
$$(a\vec{x} + b\vec{y}) \cdot \vec{z} = a \cdot \vec{x}\vec{z} + b \cdot \vec{y}\vec{z}$$

lo que expresamos brevemente diciendo que

El producto escalar de vectores paralelos es bilineal.

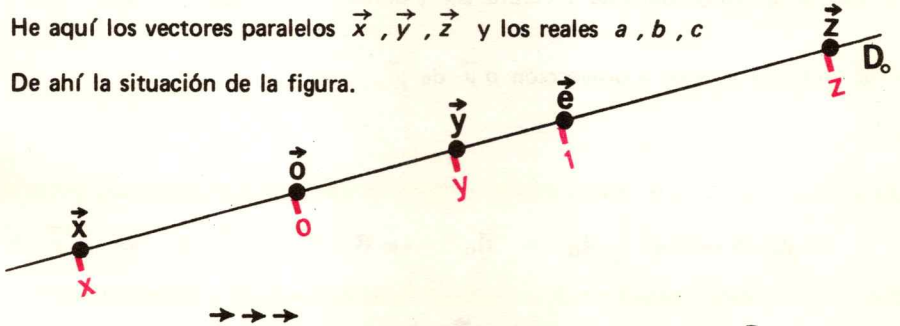
No precisaríamos aclarar que al expresar $a \cdot \vec{x}\vec{y}$ no hacemos más que abreviar a $a \cdot (\vec{x} \cdot \vec{y})$
Se observa que en esta última expresión, el primer punto indica la multiplicación en **R** y el segundo el producto escalar.

DEMOSTRACION :

A consecuencia de la conmutatividad, bastará probar la primera fórmula.

He aquí los vectores paralelos $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ y los reales a, b, c

De ahí la situación de la figura.



LOS VECTORES $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ PERTENECEN A LA RECTA VECTORIAL D_o
(provista de una referencia métrica)

FIG. 197

$$a\vec{y} + b\vec{z} = a \cdot y\vec{e} + b \cdot z\vec{e}$$
$$= ay \cdot \vec{e} + bz \cdot \vec{e} = (ay + bz)\vec{e}$$

La abscisa de $a\vec{y} + b\vec{z}$ es igual a $ay + bz$

$$\vec{x} \cdot (a\vec{y} + b\vec{z}) = (\text{abscisa de } \vec{x}) \cdot (\text{abscisa de } a\vec{y} + b\vec{z})$$
$$= x \cdot (ay + bz)$$
$$= a \cdot xy + b \cdot xz$$
$$= a \cdot \vec{x}\vec{y} + b \cdot \vec{x}\vec{z}$$

l.q.q.d.

3 – DEFINICION DE PRODUCTO ESCALAR

– ¿Cómo definiremos convenientemente un producto escalar $\vec{x} \cdot \vec{y} \in \mathbf{R}$ de TODA cupla de vectores $\vec{x}$, $\vec{y}$ que amplíe la definición dada de producto en el § 1?

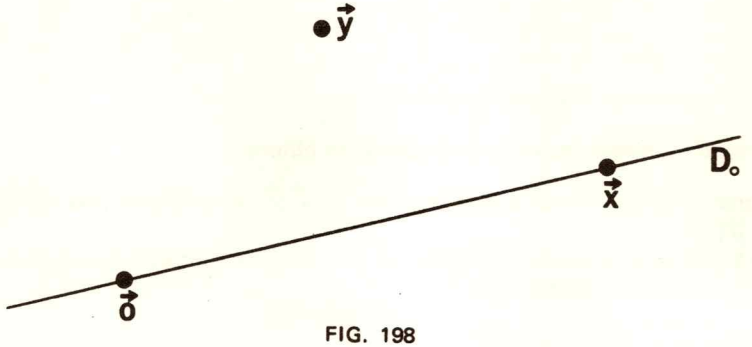
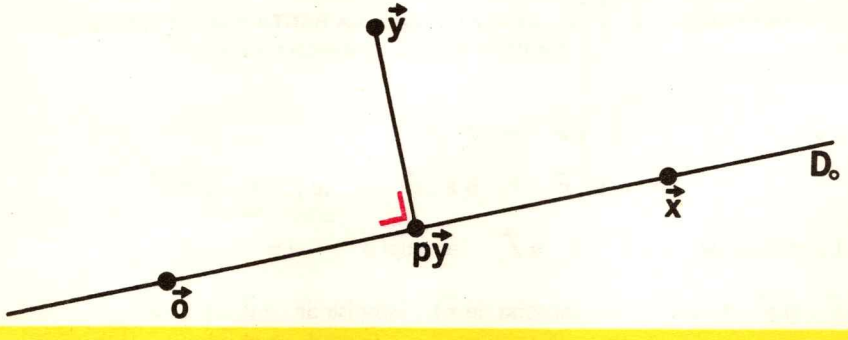


FIG. 198

– **Proyectar ortogonalmente** $\vec{y}$ sobre D_o y definir $\vec{x} \cdot \vec{y}$ igual al producto escalar $\vec{x} \cdot p\vec{y}$ de $\vec{x}$ y de la proyección $p\vec{y}$ de $\vec{y}$

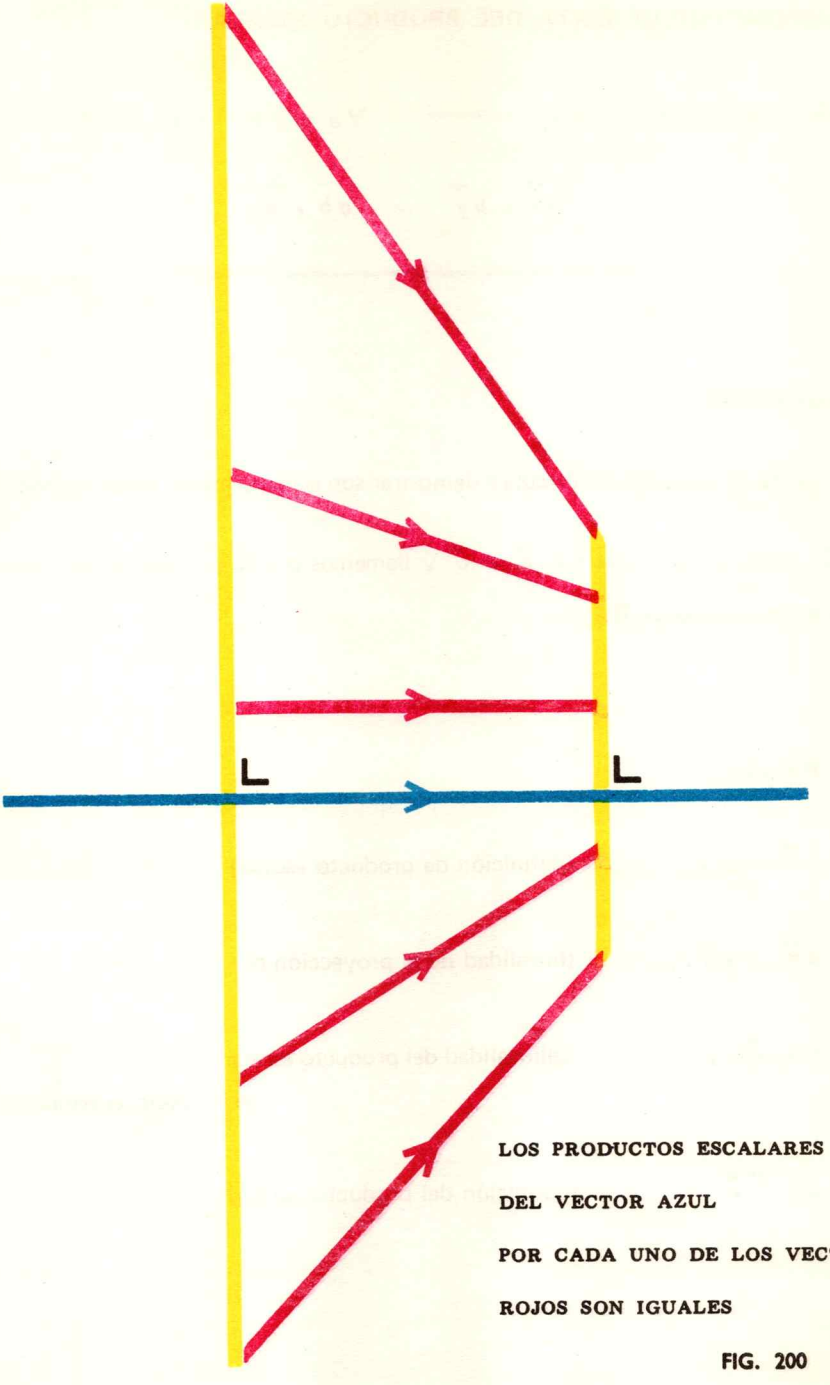
DEFINICION

Producto escalar : $\Pi_o \times \Pi_o \rightarrow \mathbf{R} : (\vec{x}, \vec{y}) \rightarrow \mathbf{XX} \quad \vec{x} \cdot \vec{y}$



$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{x} \cdot p\vec{y}$$

FIG. 199



LOS PRODUCTOS ESCALARES
DEL VECTOR AZUL
POR CADA UNO DE LOS VECTORES
ROJOS SON IGUALES

FIG. 200

4 – ASOCIATIVIDAD MIXTA DEL PRODUCTO ESCALAR

PROPOSICION $\forall a, b \in \mathbf{R}\ ;\ \forall \vec{x}, \vec{y} \in \Pi_o\ :$

$$a\vec{x} \cdot b\vec{y} = ab \cdot \vec{x}\vec{y}$$

DEMOSTRACION :

Los dos términos de la fórmula a demostrar son evidentemente nulos cuando $\vec{x} = \vec{o}$

Supongamos entonces que $\vec{x} \neq \vec{o}$ y llamemos p a la proyección ortogonal de Π_o sobre la recta vectorial $\mathbf{R}\vec{x}$

$a\vec{x} \cdot b\vec{y}$

$= a\vec{x} \cdot p(b\vec{y})$ (definición de producto escalar)

$= a\vec{x} \cdot b(p\vec{y})$ (linealidad de la proyección p)

$= ab \cdot \vec{x}(p\vec{y})$ (bilinealidad del producto escalar de los vectores paralelos $\vec{x}, p\vec{y}$)

$= ab \cdot \vec{x}\vec{y}$ (definición del producto escalar)

l.q.q.d.

5 – COSENO DE UNA CUPLA DE VECTORES NO NULOS

DEFINICION

Se denomina **coseno** *de una cupla de vectores no nulos el producto escalar de sus vectores normados.*

O expresado de otro modo

DEFINICION $\vec{x} \neq \vec{o} \neq \vec{y}$

$$\cos(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} \frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|} = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|}$$

La segunda igualdad resulta de la asociatividad mixta del producto escalar.

Si	$\vec{x} = \vec{o}$ ó $\vec{y} = \vec{o}$	**Si**	$\vec{x} \neq \vec{o} \neq \vec{y}$
Entonces	$\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$	**Entonces**	$\vec{x} \cdot \vec{y} = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot \cos(\vec{x}, \vec{y})$

Nueva definición del producto escalar

PRODUCTO ESCALAR DE LOS VECTORES NORMADOS $\vec{e}, \vec{u}$

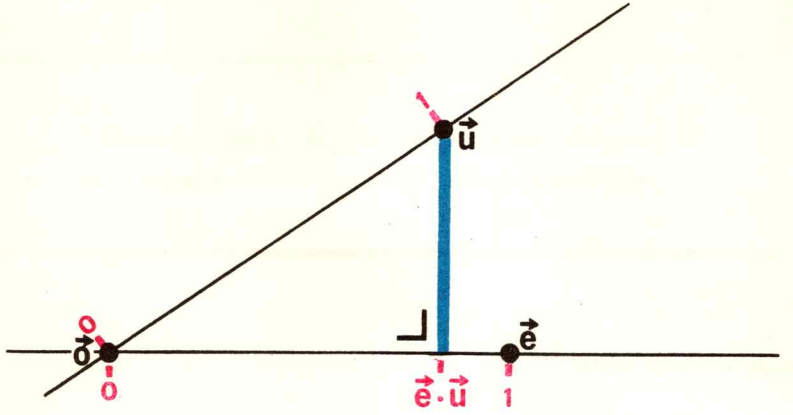


FIG. 201

COSENO DE UNA CUPLA DE VECTORES NO NULOS $\vec{x}, \vec{y}$

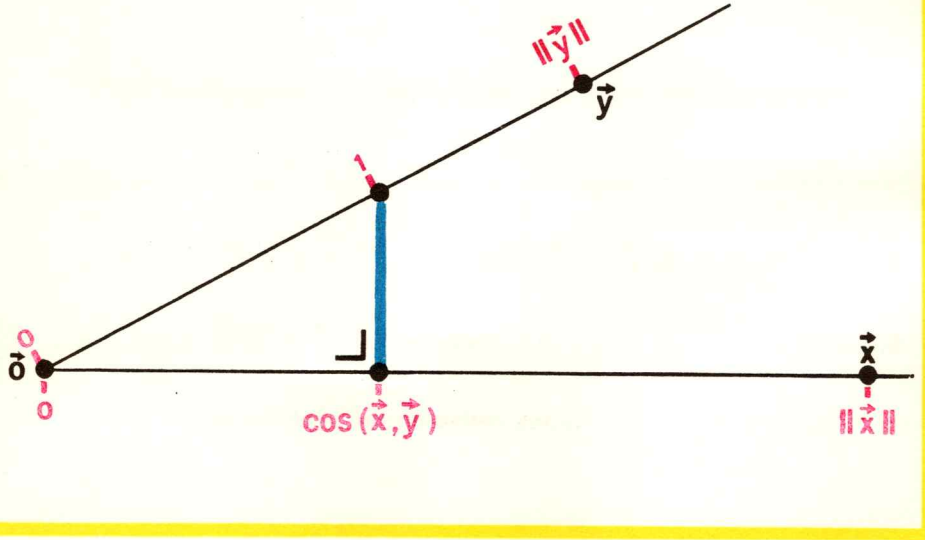
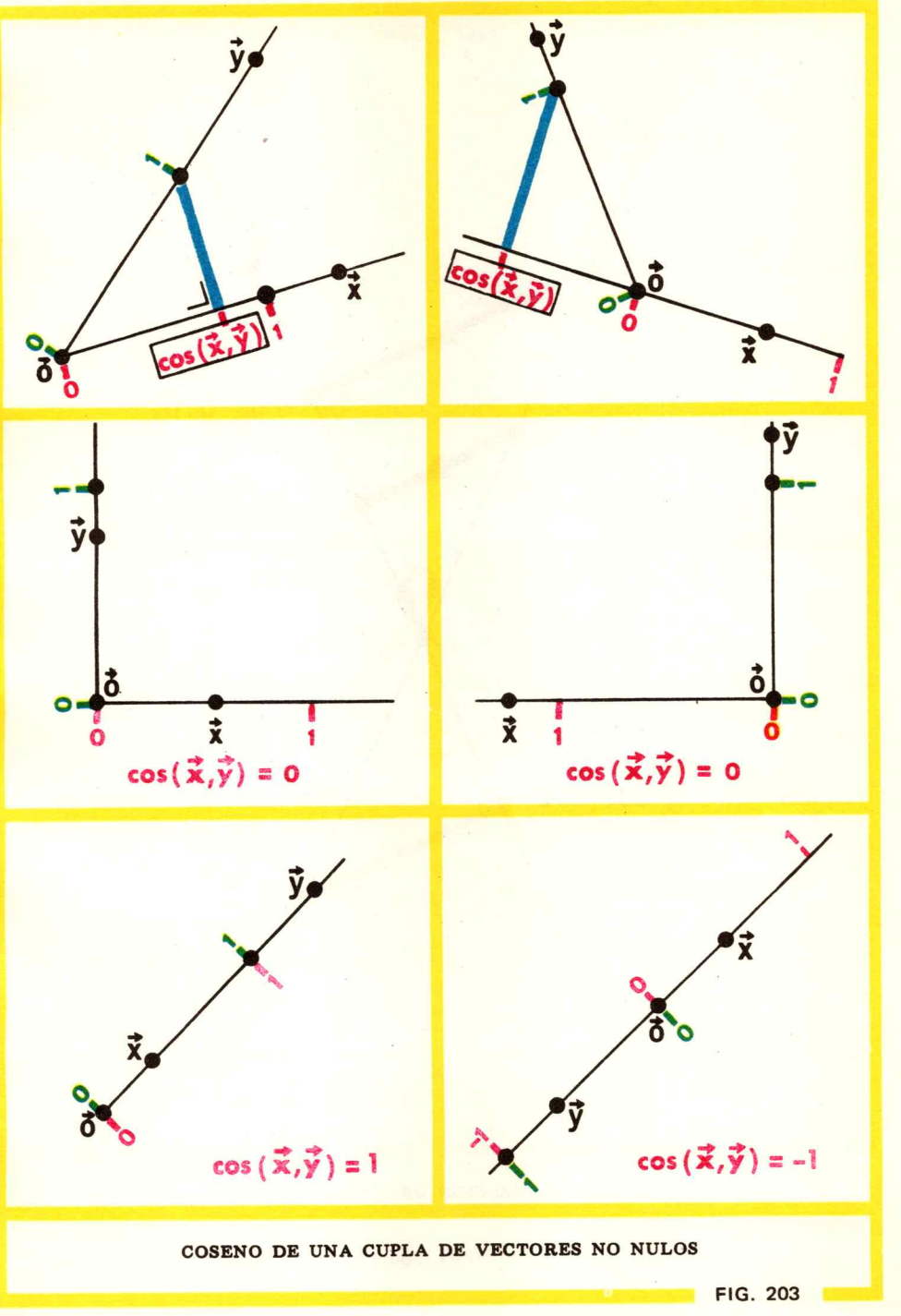
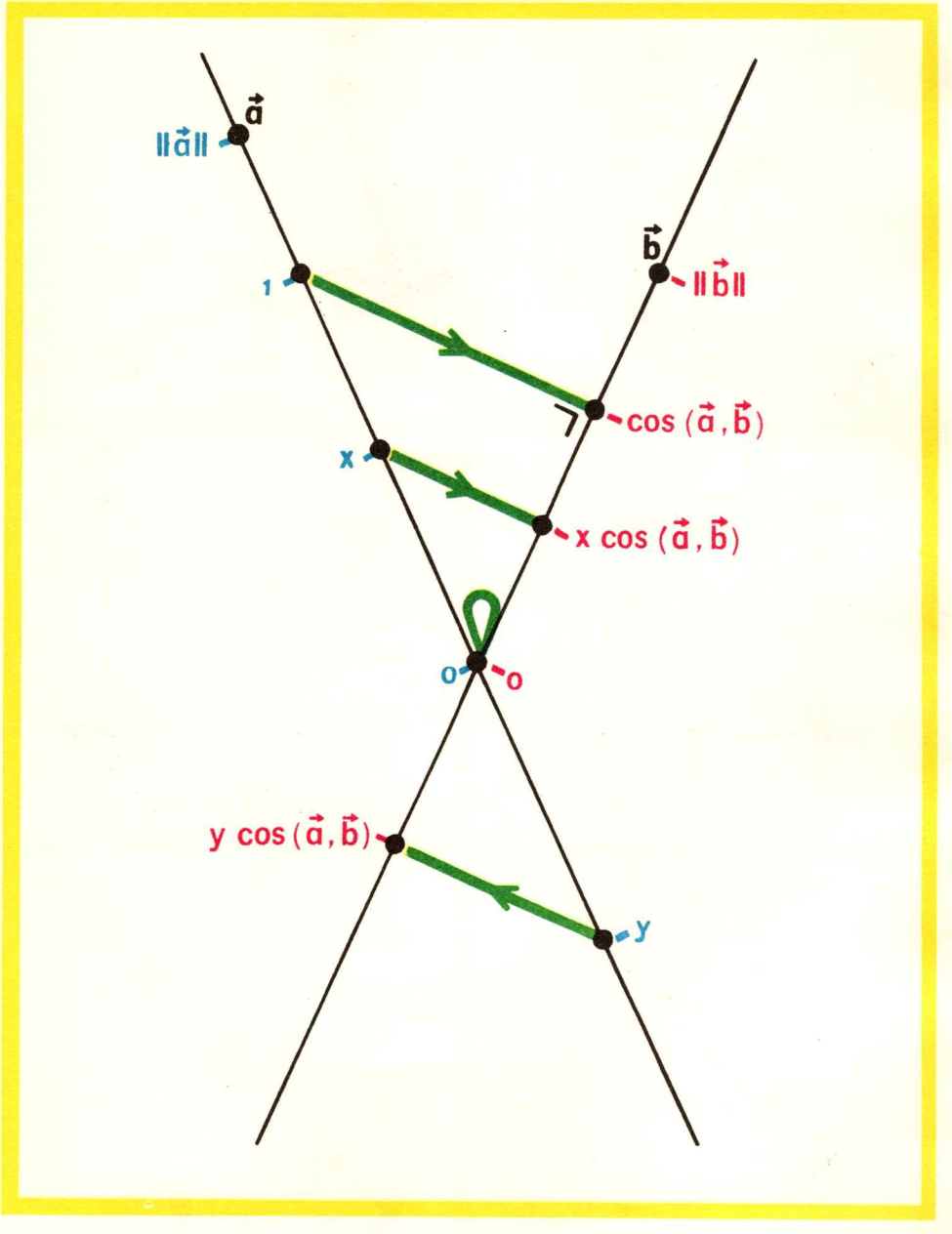


FIG. 202



COSENO DE UNA CUPLA DE VECTORES NO NULOS

FIG. 203



PROYECCION ORTOGONAL

FIG. 204

PROPOSICION 1 — *El producto escalar de los vectores normados es conmutativo.*

DEMOSTRACION:

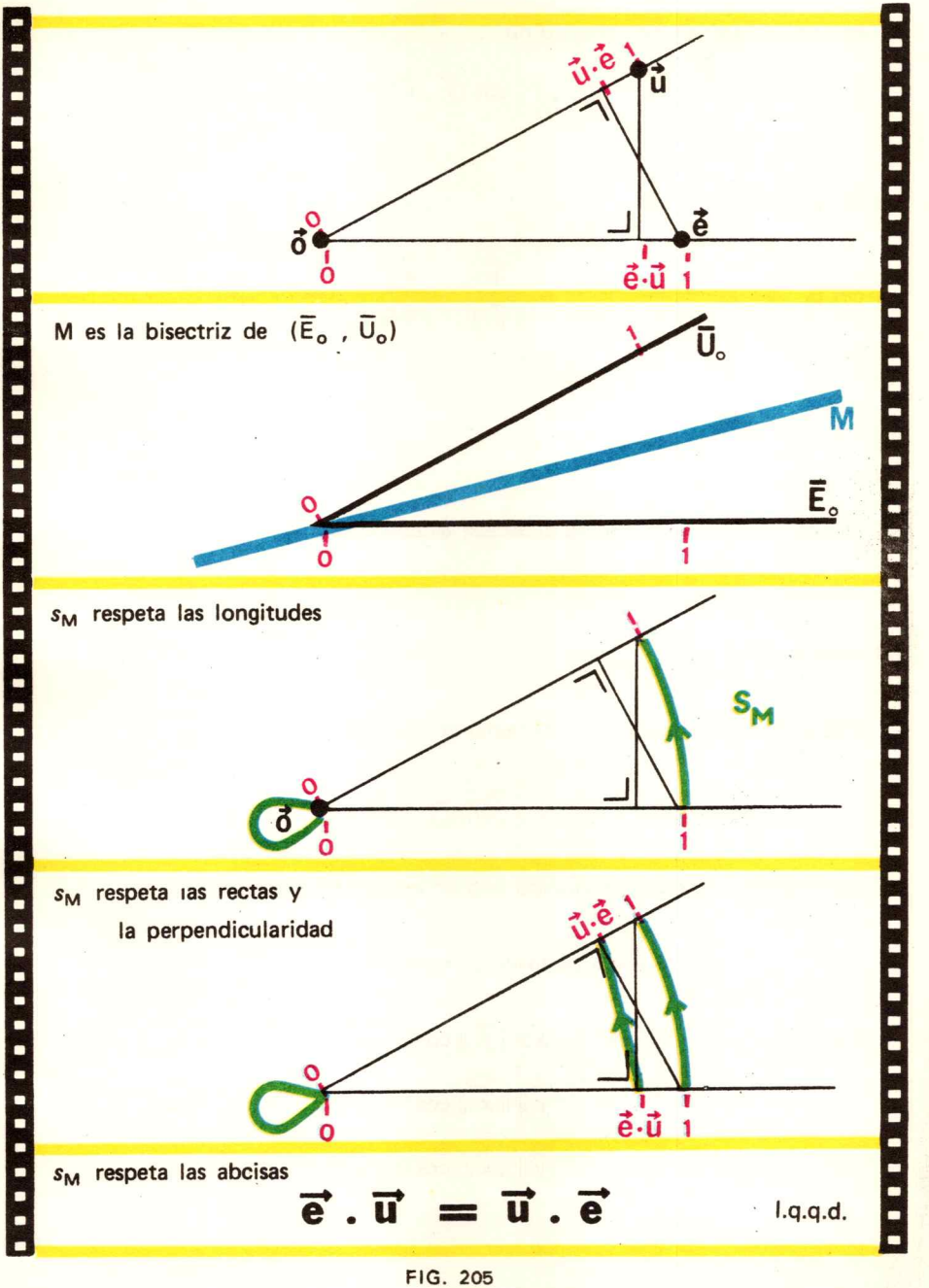


FIG. 205

PROPOSICION 2 — *El coseno es conmutativo.*

Para toda cupla de vectores no nulos $\vec{x}, \vec{y}$ *:*

$$\cos(\vec{x}, \vec{y}) = \cos(\vec{y}, \vec{x})$$

DEMOSTRACION :

$$\cos(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} \cdot \frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|} = \frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|} \cdot \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} = \cos(\vec{y}, \vec{x})$$

def. prop 1 def.

l.q.q.d.

PROPOSICION 3 — *El producto escalar es conmutativo.*

DEMOSTRACION :

Debemos probar que para toda cupla de vectores $\vec{x}, \vec{y}$:

$$\vec{x}\,\vec{y} = \vec{y}\,\vec{x}$$

Esta fórmula es evidente cuando uno de los vectores es nulo.

Si $\vec{x}, \vec{y}$ son vectores no nulos

Entonces
$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cos(\vec{x}, \vec{y})$$
$$= \|\vec{y}\| \|\vec{x}\| \cos(\vec{x}, \vec{y})$$
$$= \|\vec{y}\| \|\vec{x}\| \cos(\vec{y}, \vec{x}) = \vec{y} \cdot \vec{x}$$

l.q.q.d.

6 – BILINEALIDAD DEL PRODUCTO ESCALAR

PROPOSICION

Si $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ *designan vectores y* $a, b \in \mathbf{R}$

Entonces

$$\vec{x} \cdot (a\vec{y} + b\vec{z}) = a \cdot \vec{x}\,\vec{y} + b \cdot \vec{x}\,\vec{z}$$

$$(a\vec{x} + b\vec{y}) \cdot \vec{z} = a \cdot \vec{x}\,\vec{z} + b \cdot \vec{y}\,\vec{z}$$

Se expresa brevemente esta proposición diciendo que

El Producto escalar

es

BILINEAL

Teniendo en cuenta la conmutatividad, bastará con que demostremos la primera fórmula.

DEMOSTRACION :

Llamemos $p : \Pi_o \to D_o$ a la proyección ortogonal sobre la recta $D_o \in \mathfrak{D}_o$ que comprende a $\vec{x}$

$$\vec{x} \cdot (a\vec{y} + b\vec{z})$$

$= \vec{x} \cdot p\,(a\vec{y} + b\vec{z})$ (definición de producto escalar)

$= \vec{x} \cdot (a\,p\,\vec{y} + b\,p\,\vec{z})$ (linealidad de la proyección p)

$= a \cdot \vec{x}\,p\,\vec{y} + b \cdot \vec{x}\,p\,\vec{z})$ (bilinealidad del producto escalar de vectores paralelos)

$= a \cdot \vec{x}\,\vec{y} + b \cdot \vec{x}\,\vec{z}$ (definición de producto escalar)

l.q.q.d.

7 — VECTORIAL EUCLIDIANO PLANO

Expresamos aún la proposición del § 1

$$\forall\ \vec{x} \in \Pi_o$$

$$\vec{x}^2 \geqslant 0 \quad \text{y} \quad \boxed{\vec{x}^2 = 0 \iff \vec{x} = \vec{o}}$$

diciendo curiosamente que :

El PRODUCTO ESCALAR *es* **estrictamente positivo**

Las propiedades del producto escalar están recapituladas en el

TEOREMA

El vectorial $\mathbf{R}, \Pi_o, +$ **está provisto de un producto escalar**

$$\Pi_o \times \Pi_o \to \mathbf{R} \quad : \quad (\vec{x}, \vec{y}) \to \vec{x} \cdot \vec{y}$$

bilineal, conmutativo y estrictamente positivo.

Se expresa ese hecho diciendo que

$\mathbf{R}, \Pi_o, +$ **provisto de su producto escalar**

es un

VECTORIAL EUCLIDIANO PLANO

El vectorial euclidiano plano es una maravillosa máquina-herramienta.

¡Te enseñaremos el modo de utilizarla!

8 – ORTOGONALIDAD

Problema

He aquí un vector no nulo $\vec{x}$

¿Cuál será el conjunto de vectores $\vec{y}$ tales que $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$

Solución

$\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$ **ssi** $\vec{x} \cdot p\vec{y} = 0$ **ssi** $p\vec{y} = \vec{o}$

donde p designa como habitualmente la proyección ortogonal sobre la recta vectorial que comprende a $\vec{x}$:

$$\{ \vec{y} \in \Pi_o \mid \vec{x} \cdot \vec{y} = 0 \}$$

$$= \{ \vec{y} \in \Pi_o \mid p\vec{y} = \vec{o} \}$$

$$= \text{una recta vectorial}$$

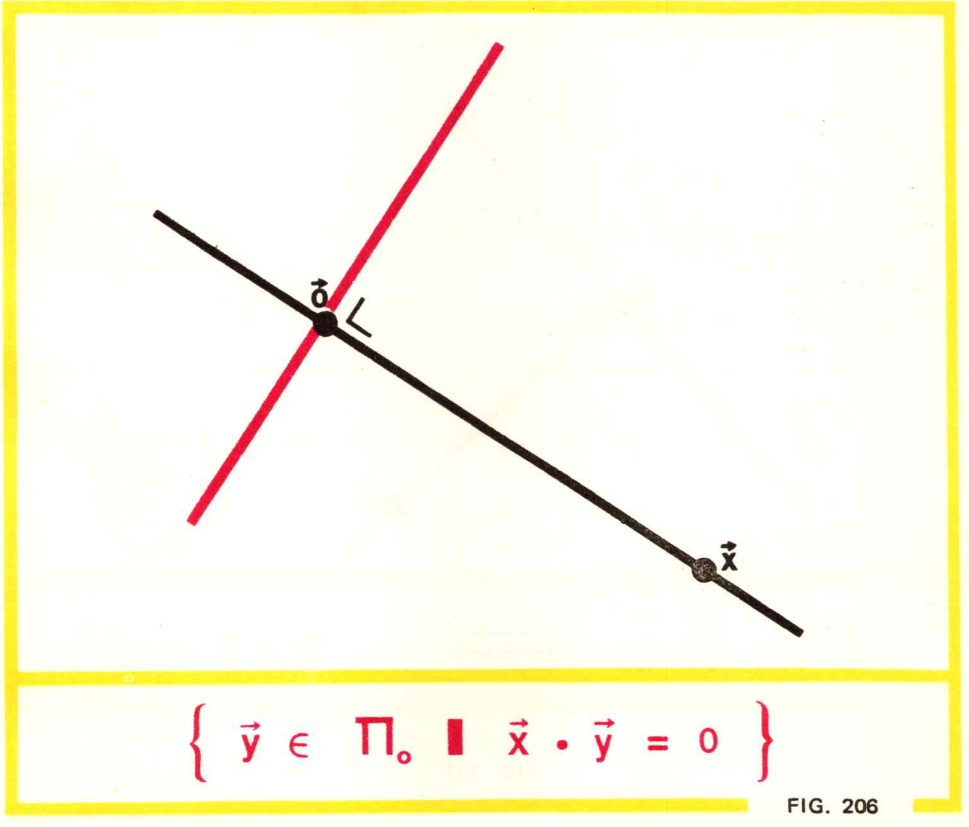


FIG. 206

DEFINICION

$$\forall\ \vec{x}, \vec{y} \in \Pi_o \ : \ \vec{x} \perp \vec{y} \iff \vec{x} \cdot \vec{y} = 0$$

O dicho de otro modo :

Dos vectores son **ortogonales ssi** *su producto escalar es nulo.*

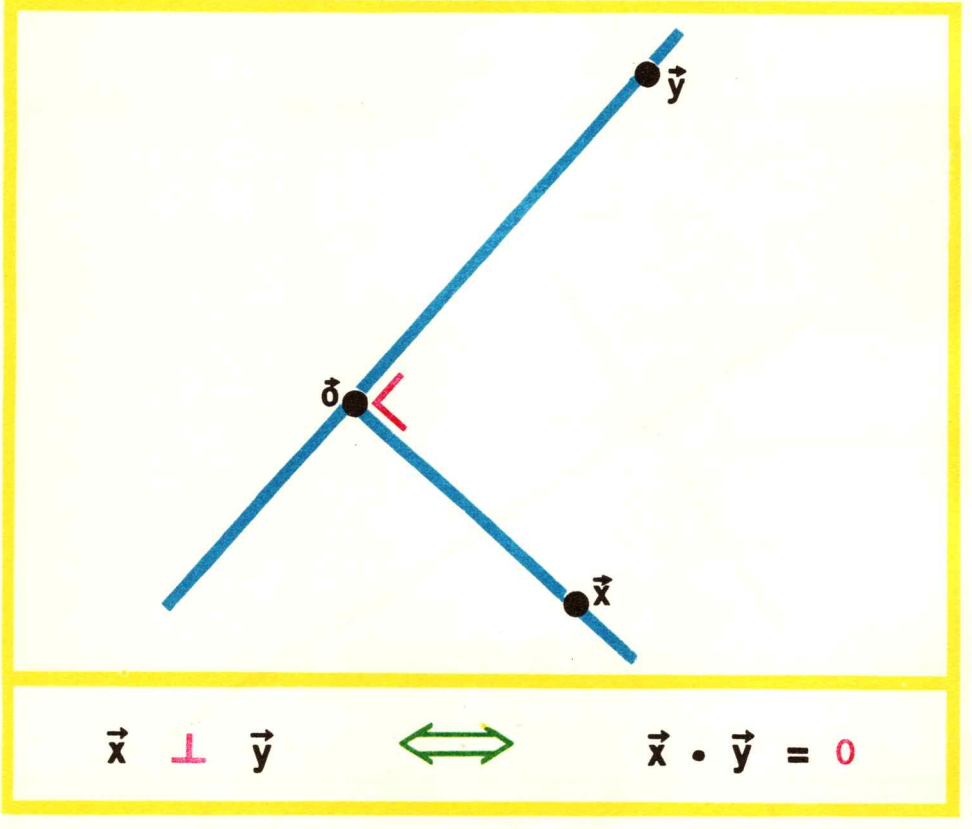


FIG. 207

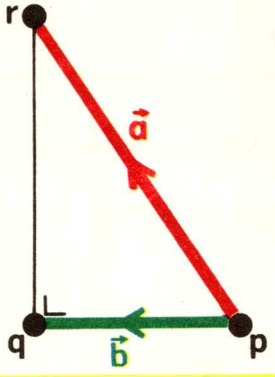
9 – TRIANGULOS RECTANGULOS

Tenemos un triángulo rectángulo, es decir, los puntos p , q , r tales que

$$p \neq q \neq r \qquad \text{y} \qquad pq \perp qr$$

PROPOSICION 1

Si



Entonces

$$\| \vec{b} \| = \| \vec{a} \| \cos (\vec{a} , \vec{b})$$

DEMOSTRACION :

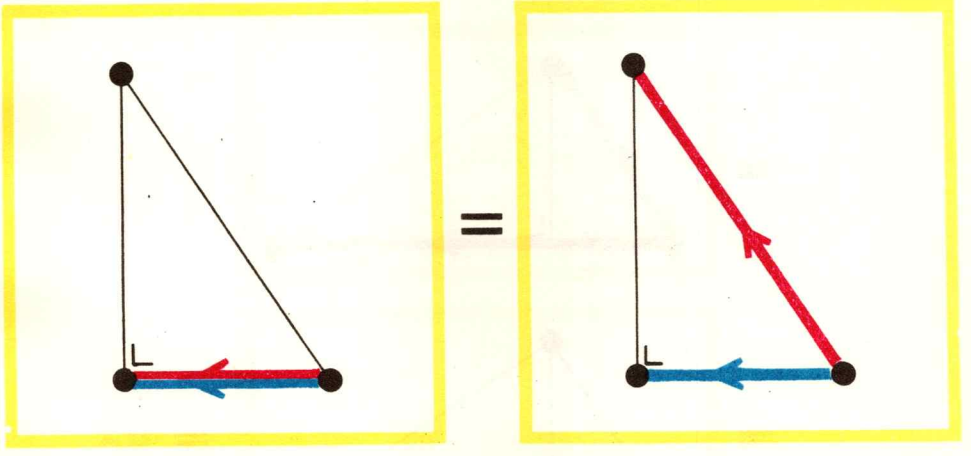


FIG. 208

$$\vec{b} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

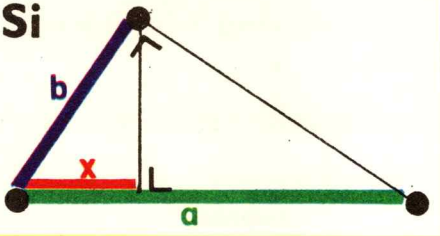
$$\| \vec{b} \| \cdot \| \vec{b} \| = \| \vec{b} \| \cdot \| \vec{a} \| \cdot \cos (\vec{a} , \vec{b})$$

$$\| \vec{b} \| = \| \vec{a} \| \cdot \cos (\vec{a} , \vec{b})$$

l.q.q.d.

PROPOSICION 2

Si

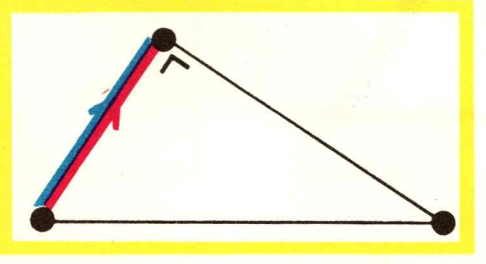


Entonces

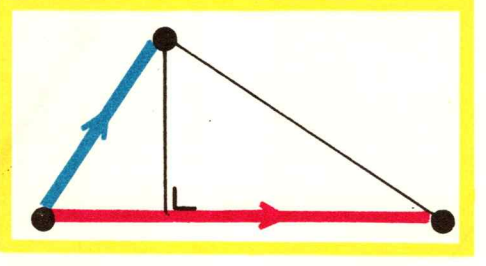
$$b^2 = ax$$

DEMOSTRACION : Cada uno de los recuadros designa el producto escalar de los vectores azul y rojo.

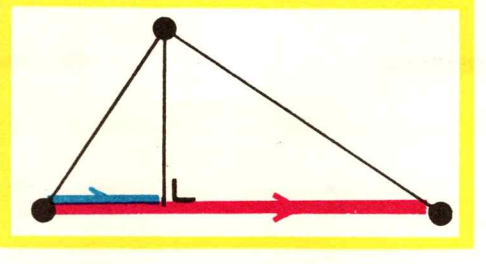
$b^2 =$



$=$



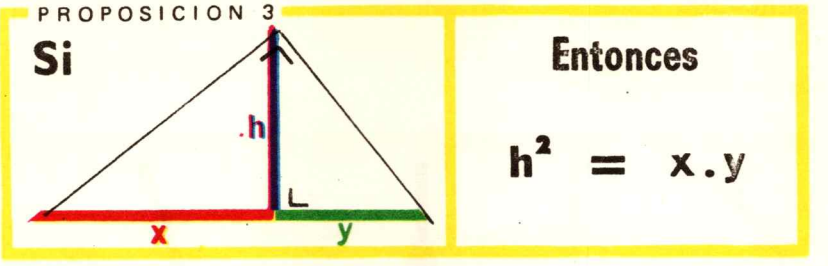
$=$



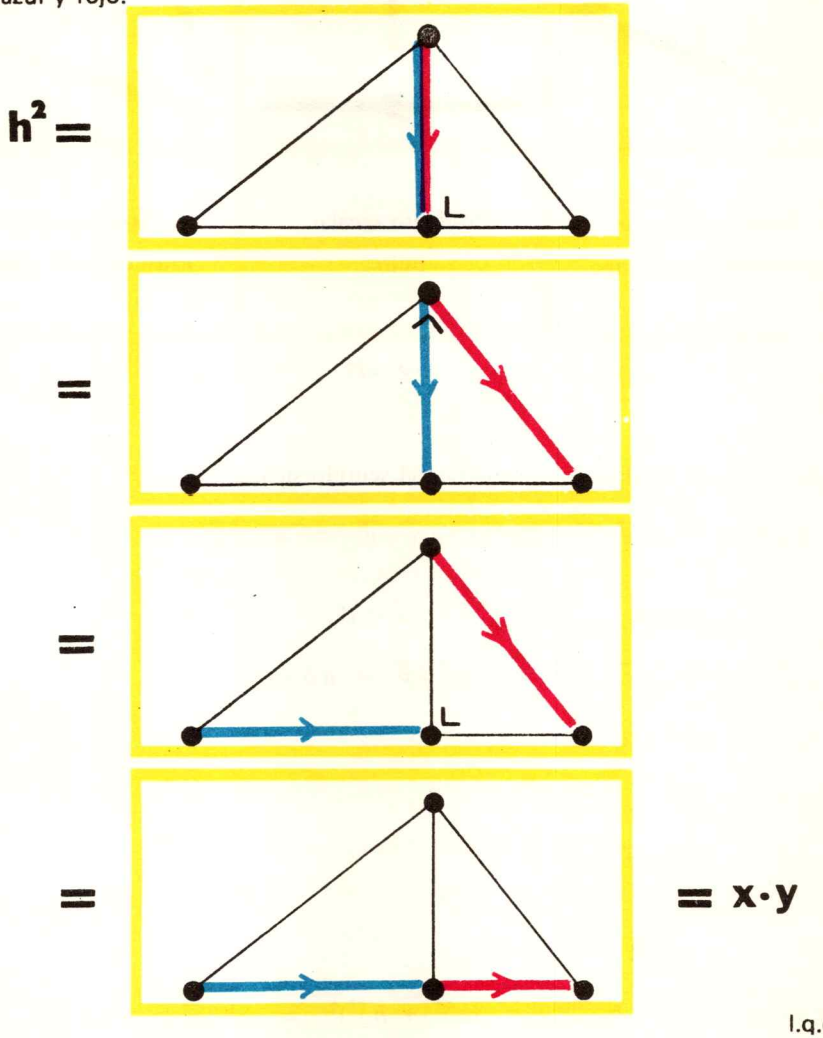
$= ax$

l.q.q.d.

FIG. 209



DEMOSTRACION : Cada uno de los recuadros designa el producto escalar de los vectores azul y rojo.



l.q.q.d.

FIG. 210

10 – EJERCICIOS

1. Observa y explica

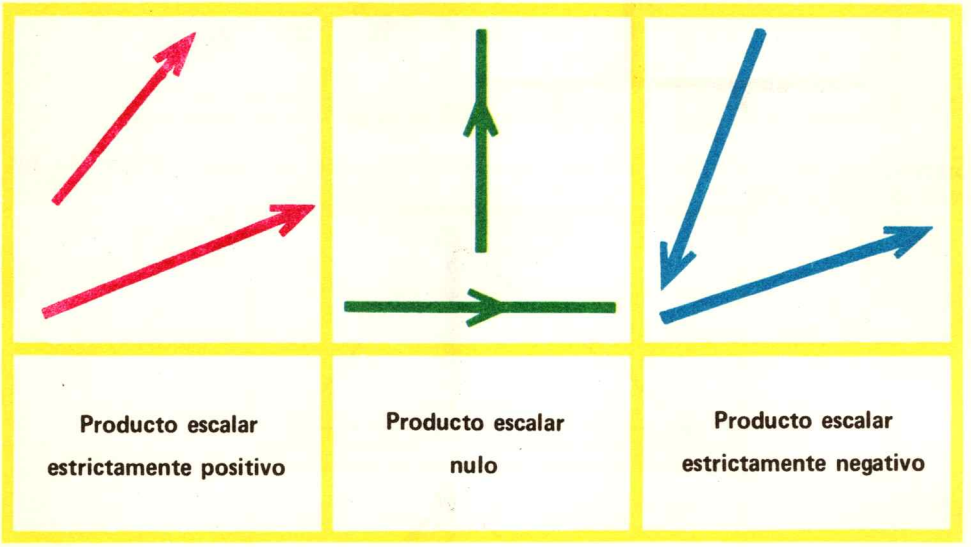


FIG. 211

2. El producto escalar es asociativo en el sentido siguiente

$$\forall a \in \mathbf{R} \quad , \quad \forall \vec{x} , \vec{y} \in \Pi_o \quad : \quad a \vec{x} \cdot \vec{y} \quad = \quad a \cdot \vec{x} \vec{y}$$

3. $\forall a , b , c , d \in \mathbf{R} \quad ; \quad \vec{x} , \vec{y} , \vec{z} , \vec{u} \in \Pi_o \quad :$

$$a \vec{x} \cdot b \vec{y} \quad = \quad a \vec{y} \cdot b \vec{x} \quad = \quad a b \vec{x} \cdot \vec{y} \quad = \quad a b \cdot \vec{x} \vec{y} \quad = \quad \ldots$$

$$(a \vec{x} \quad + \quad b \vec{y}) \cdot (c \vec{z} \quad + \quad d \vec{u}) \quad = \quad \ldots$$

$$(a \vec{x} \quad + \quad b \vec{y} \quad + \quad c \vec{z}) \cdot \vec{u} \quad = \quad \ldots$$

$$(a \vec{x} \quad - \quad b \vec{y}) \cdot \vec{z} \quad = \quad \ldots$$

4. **Si** $\quad a , b \in \mathbf{R} \quad ; \quad \vec{x} , \vec{y} \in \Pi_o$

Entonces $\quad \| a \vec{x} \quad + \quad b \vec{y} \|^2 \quad = \quad (a \vec{x} \quad + \quad b \vec{y})^2 \quad = \quad a^2 \| \vec{x} \|^2 + 2 a b \cdot \vec{x} \vec{y} + b^2 \| \vec{y} \|^2$

5. $\forall \vec{x} \in \Pi_o \ : \ \vec{o} \perp \vec{x} \perp \vec{o}$

En particular : $\vec{o} \perp \vec{o}$

6. El vector nulo es el único vector ortogonal a sí mismo.

7. El vector nulo es el único vector ortogonal a cualquier vector de Π_o

8. La relación de ortogonalidad definida en Π_o es simétrica. Pero nó es ni reflexiva, ni antirreflexiva, ni transitiva.

9. La relación de ortogonalidad definida en $\Pi_o \setminus \{\vec{o}\}$ es simétrica y antirreflexiva.

Pero no es transitiva.

10. **Si** $a \in \mathbf{R}$ y $\vec{x}, \vec{y} \in \Pi_o$

Entonces $\vec{x} \perp \vec{y} \implies a\vec{x} \perp \vec{y}$

11. **Si** $a \in \mathbf{R}_o$ y $\vec{x}, \vec{y} \in \Pi_o$

Entonces $\vec{x} \perp \vec{y} \iff a\vec{x} \perp \vec{y}$

12. **Si** $a \in \mathbf{R}$ y $\vec{x}, \vec{y} \in \Pi_o$

Entonces $\vec{x} \perp \vec{y} \implies a\vec{x} \perp a\vec{y}$

Las homotecias de centro o conservan la ortogonalidad.

13. **Si** $\vec{x}, \vec{y}$ designan vectores no nulos,

Entonces $\vec{x} \perp \vec{y} \iff \cos(\vec{x}, \vec{y}) = 0$

12

Cálculo en el vectorial euclidiano plano

1 — PEQUEÑO FORMULARIO

— ¿A qué se reducirán las fórmulas de 11.6 que expresan la bilinealidad del producto escalar cuando

$a = b = 1$ | $a = 1 \ , \ b = -1$

$\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \Pi_o$

$\vec{x} \cdot (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x}\vec{y} + \vec{x}\vec{z}$ | $\vec{x} \cdot (\vec{y} - \vec{z}) = \vec{x}\vec{y} - \vec{x}\vec{z}$

$(\vec{x} + \vec{y}) \cdot \vec{z} = \vec{x}\vec{z} + \vec{y}\vec{z}$ | $(\vec{x} - \vec{y}) \cdot \vec{z} = \vec{x}\vec{z} - \vec{y}\vec{z}$

— O expresado de otro modo:

El producto escalar distribuye la adición y la sustracción vectoriales

El PRODUCTO ESCALAR

es CONMUTATIVO

y DISTRIBUTIVO

con respecto a la ADICION y SUSTRACCION

vectoriales.

Para todo $\vec{x}, \vec{y} \in \Pi_o$:

$(\vec{x} + \vec{y})^2$

$= (\vec{x} + \vec{y})(\vec{x} + \vec{y})$

$= (\vec{x} + \vec{y})(\vec{x} + \vec{y})$

distributividad

$= (\vec{x} + \vec{y})\vec{x} + (\vec{x} + \vec{y})\vec{y}$

$= (\vec{x} + \vec{y})\vec{x} + (\vec{x} + \vec{y})\vec{y}$

distributividad

$= \vec{x}.\vec{x} + \vec{y}.\vec{x} + \vec{x}.\vec{y} + \vec{y}.\vec{y}$

cálculo en $\mathbf{R}, +$

conmutatividad

$= \vec{x}.\vec{x} + \vec{x}.\vec{y} + \vec{x}.\vec{y} + \vec{y}.\vec{y}$

$= \vec{x}^2 + 2\vec{x}\,\vec{y} + \vec{y}^2$

$(\vec{x} - \vec{y})^2$

$= (\vec{x} - \vec{y})(\vec{x} - \vec{y})$

$= (\vec{x} - \vec{y})(\vec{x} - \vec{y})$

distributividad

$= (\vec{x} - \vec{y})\vec{x} - (\vec{x} - \vec{y})\vec{y}$

$= (\vec{x} - \vec{y})\vec{x} - (\vec{x} - \vec{y})\vec{y}$

$= \vec{x}.\vec{x} - \vec{y}.\vec{x} - (\vec{x}.\vec{y} - \vec{y}.\vec{y})$

$= \vec{x}.\vec{x} - \vec{y}.\vec{x} - \vec{x}.\vec{y} + \vec{y}.\vec{y}$

$= \vec{x}.\vec{x} - \vec{x}.\vec{y} - \vec{x}.\vec{y} + \vec{y}.\vec{y}$

$= \vec{x}^2 - 2\vec{x}.\vec{y} + \vec{y}^2$

$$(\vec{x} + \vec{y})^2 = \vec{x}^2 + 2\vec{x}\cdot\vec{y} + \vec{y}^2$$

$$(\vec{x} - \vec{y})^2 = \vec{x}^2 - 2\vec{x}\cdot\vec{y} + \vec{y}^2$$

Para todo $\vec{x}, \vec{y} \in \Pi_o$:

$$(\vec{x} + \vec{y}) \cdot (\vec{x} - \vec{y})$$
$$= (\vec{x} + \vec{y}) \cdot (\vec{x} - \vec{y})$$

El producto escalar distribuye la sustracción

$$= (\vec{x} + \vec{y}) \cdot \vec{x} - (\vec{x} + \vec{y}) \cdot \vec{y}$$
$$= (\vec{x} + \vec{y}) \cdot \vec{x} - (\vec{x} + \vec{y}) \cdot \vec{y}$$

El producto escalar distribuye la adición

$$= (\vec{x}\cdot\vec{x} + \vec{y}\cdot\vec{x}) - (\vec{x}\cdot\vec{y} + \vec{y}\cdot\vec{y})$$

Cálculo en $\mathbf{R}$, +

$$= \vec{x}\cdot\vec{x} + \vec{y}\cdot\vec{x} - \vec{x}\cdot\vec{y} - \vec{y}\cdot\vec{y}$$

Conmutatividad del producto escalar

$$= \vec{x}\cdot\vec{x} + \vec{x}\cdot\vec{y} - \vec{x}\cdot\vec{y} - \vec{y}\cdot\vec{y}$$

Cálculo en $\mathbf{R}$, +

$$= \vec{x}\cdot\vec{x} - \vec{y}\cdot\vec{y}$$
$$= \vec{x}^2 - \vec{y}^2$$

$$(\vec{x} + \vec{y}) \cdot (\vec{x} - \vec{y}) = \vec{x}^2 - \vec{y}^2$$

Pequeño formulario $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \Pi_o$

$$(\vec{x} + \vec{y})^2 = \vec{x}^2 + 2\vec{x}\vec{y} + \vec{y}^2$$
$$(\vec{x} - \vec{y})^2 = \vec{x}^2 - 2\vec{x}\vec{y} + \vec{y}^2$$
$$(\vec{x} + \vec{y}) \cdot (\vec{x} - \vec{y}) = \vec{x}^2 - \vec{y}^2$$
$$(\vec{x} + \vec{y})^2 + (\vec{x} - \vec{y})^2 = 2\vec{x}^2 + 2\vec{y}^2$$

Obtenemos la cuarta fórmula sumando las dos primeras.

2 – TEOREMA DE PITAGORAS

TEOREMA $\quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \Pi_o$

$$\| \vec{x} + \vec{y} \|^2 = \| \vec{x} \|^2 + 2\vec{x}\vec{y} + \| \vec{y} \|^2$$

Si

$$\vec{x} \neq \vec{o} \neq \vec{y}$$

Entonces

$$\| \vec{x} + \vec{y} \|^2 = \| \vec{x} \|^2 + 2 \| \vec{x} \| . \| \vec{y} \| \cos (\vec{x}, \vec{y}) + \| \vec{y} \|^2$$

PITAGORAS

DEMOSTRACION :

1. En la primera fórmula del (§ 1) se reemplaza cada cuadrado escalar por el cuadrado de la longitud.

2. Se obtiene la segunda fórmula que acabamos de dar a partir de la primera, teniendo en cuenta la segunda definición del producto escalar.

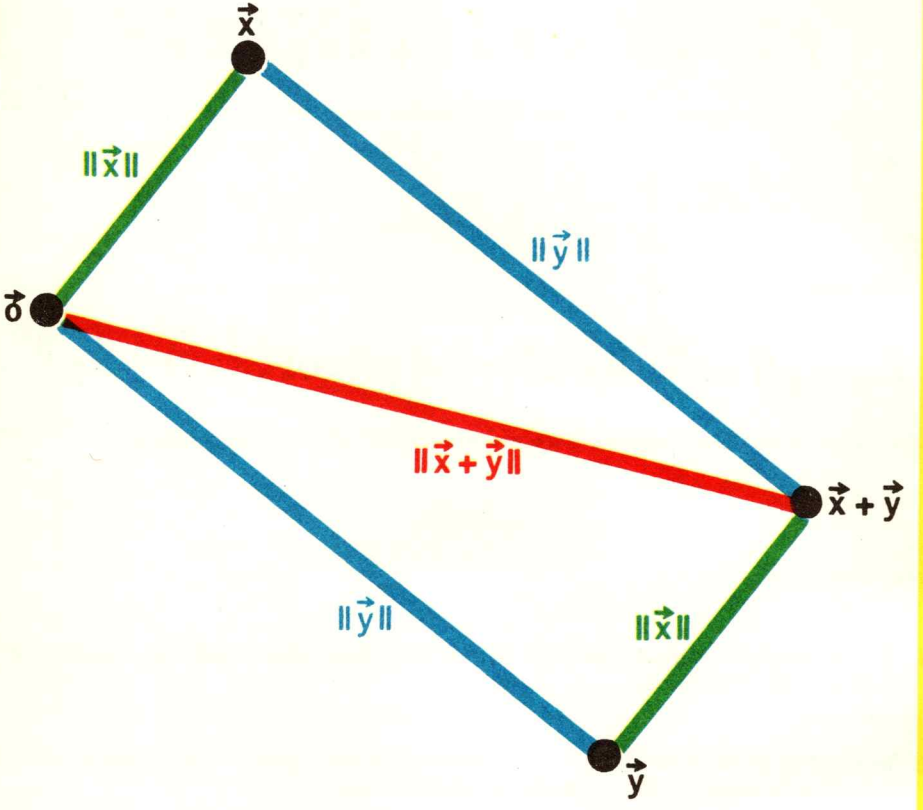
l.q.q.d.

$$\vec{x} \perp \vec{y} \iff \vec{x} \cdot \vec{y} = 0$$

Por tanto, la primera fórmula del teorema de Pitágoras determina el

PUENTE DE LOS BURROS $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \Pi_o$

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 \iff \vec{x} \cdot \vec{y} = 0$$



$$\|\vec{x} + \vec{y}\| = \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\| \iff \vec{x} \perp \vec{y}$$

FIG. 212

PUENTE DE LOS BURROS

3 — PARALELOGRAMO

Por el cálculo vectorial volveremos a encontrar todo cuanto sabemos acerca del paralelogramo.

TEOREMA $\forall\, a, b, c, d \in \Pi$:

$\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{cd}$ $\iff$ $\overrightarrow{ac} = \overrightarrow{bd}$

$\Updownarrow$ $\Updownarrow$

$[ad]$ y $[bc]$ **tienen el mismo punto medio**

DEFINICION

La sucesión de puntos a, b, c, d *es un* **paralelogramo**

ssi

satisface a una de las condiciones equivalentes del teorema.

Llamemos o a un punto de Π, lo que erige al plano en el vectorial $\mathbf{R}, \Pi_o, +$

Hagamos $\vec{a} = \overrightarrow{oa}$; $\vec{b} = \overrightarrow{ob}$; $\vec{c} = \overrightarrow{oc}$; $\vec{d} = \overrightarrow{od}$

y $\vec{m} = \overrightarrow{om}$ para todo $m \in \Pi$

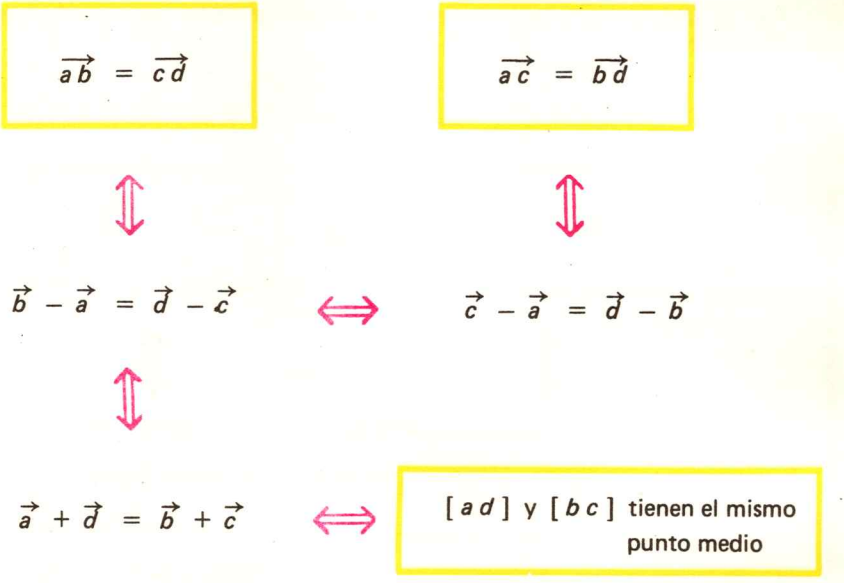
Recordando que

m es el punto medio de $[ad]$ **ssi** $\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{d})$

Entonces,

$[ad]$ y $[bc]$ tienen el mismo punto medio **ssi** $\vec{a} + \vec{d} = \vec{b} + \vec{c}$

DEMOSTRACION DEL TEOREMA :



l.q.q.d.

En el paralelogramo (a , b , c , d) :

$\| \overrightarrow{ab} \|$ y $\| \overrightarrow{cd} \|$ son las longitudes de los lados opuestos.

$\| \overrightarrow{ac} \|$ y $\| \overrightarrow{bd} \|$ son las longitudes de los lados opuestos.

$\| \overrightarrow{ad} \|$ y $\| \overrightarrow{bc} \|$ son las longitudes de las diagonales.

PROPOSICION

En todo paralelogramo,

1. *Las longitudes de los lados opuestos son iguales.*
2. *La suma de los cuadrados de las longitudes de las diagonales es igual a la suma de los cuadrados de los cuatro lados.*

O expresado de otro modo :

PROPOSICION

Si $(a\,,b\,,c\,,d)$ es un paralelogramo,

Entonces $\|\overrightarrow{ab}\| = \|\overrightarrow{cd}\|\ ;\ \|\overrightarrow{ac}\| = \|\overrightarrow{bd}\|$

$$\|\overrightarrow{ad}\|^2 + \|\overrightarrow{bc}\|^2 = \|\overrightarrow{ab}\|^2 + \|\overrightarrow{cd}\|^2 + \|\overrightarrow{ac}\|^2 + \|\overrightarrow{bd}\|^2$$

DEMOSTRACION :

1. $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{cd} \implies \|\overrightarrow{ab}\| = \|\overrightarrow{cd}\|$

   $\overrightarrow{ac} = \overrightarrow{bd} \implies \|\overrightarrow{ac}\| = \|\overrightarrow{bd}\|$

2.

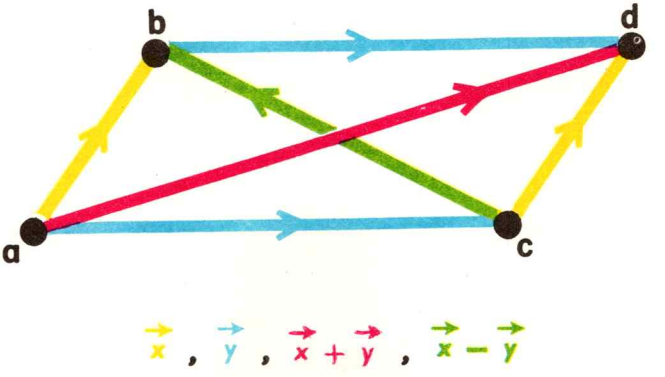


FIG. 213

Según la cuarta fórmula del formulario de (§ 1)

$$(\vec{x}+\vec{y})^2 + (\vec{x}-\vec{y})^2 = 2\vec{x}^2 + 2\vec{y}^2$$

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 + \|\vec{x}-\vec{y}\|^2 = 2\|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{y}\|^2$$

$$\|\overrightarrow{ad}\|^2 + \|\overrightarrow{bc}\|^2 = \|\overrightarrow{ab}\|^2 + \|\overrightarrow{cd}\|^2 + \|\overrightarrow{ac}\|^2 + \|\overrightarrow{bd}\|^2$$

l.q.q.d.

4 – RECTANGULO

Para todo $\vec{x}, \vec{y} \in \Pi_o$:

$$(\vec{x} + \vec{y})^2 - (\vec{x} - \vec{y})^2 = 4\vec{x}\,\vec{y}$$

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 - \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = 4\vec{x}\,\vec{y}$$

Por tanto, $\vec{x}\,\vec{y} = 0 \iff \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x} - \vec{y}\|^2$

$$\vec{x}\,\vec{y} = 0 \iff \|\vec{x} + \vec{y}\| = \|\vec{x} - \vec{y}\|$$

De donde este nuevo criterio de ortogonalidad :

$\forall \vec{x}, \vec{y} \in \Pi_o$

$$\vec{x} \perp \vec{y} \iff \vec{x} \cdot \vec{y} = 0$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$\|\vec{x} + \vec{y}\| = \|\vec{x} - \vec{y}\|$$

PROPOSICION

Para todo paralelogramo $(a\ ,\ b\ ,\ c\ ,\ d)$:

$$\overrightarrow{ab} \perp \overrightarrow{ac} \iff \| \overrightarrow{ad} \| = \| \overrightarrow{bc} \|$$

DEFINICION

El paralelogramo $(a\ ,\ b\ ,\ c\ ,\ d)$ *es un* **rectángulo**

ssi

se cumple una de las condiciones equivalentes de la proposición.

DEMOSTRACION :

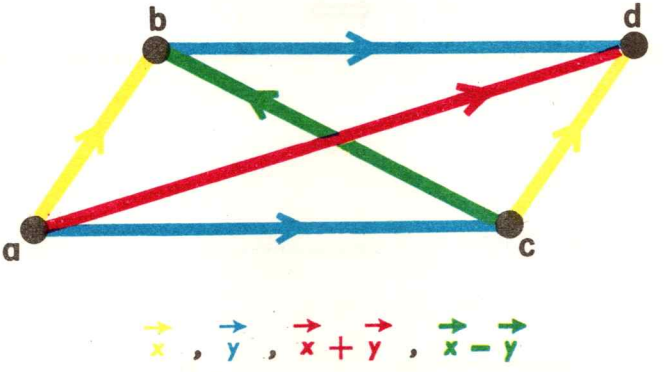


FIG. 214

$$\vec{x} \perp \vec{y} \iff \| \vec{x} + \vec{y} \| = \| \vec{x} - \vec{y} \|$$

$$\overrightarrow{ab} \perp \overrightarrow{ac} \iff \| \overrightarrow{ad} \| = \| \overrightarrow{bc} \|$$

l.q.q.d.

5 – ROMBO

Para todo $\vec{x}, \vec{y} \in \Pi_o$:

$$\vec{x}^2 - \vec{y}^2 = (\vec{x} + \vec{y})(\vec{x} - \vec{y})$$

$$\|\vec{x}\|^2 - \|\vec{y}\|^2 = (\vec{x} + \vec{y})(\vec{x} - \vec{y})$$

Por tanto, $\|\vec{x}\|^2 = \|\vec{y}\|^2 \iff (\vec{x} + \vec{y})(\vec{x} - \vec{y}) = 0$

$$\|\vec{x}\| = \|\vec{y}\| \iff (\vec{x} + \vec{y})(\vec{x} - \vec{y}) = 0$$

$\forall\, \vec{x}, \vec{y} \in \Pi_o$

$$\|\vec{x}\| = \|\vec{y}\| \iff \vec{x} + \vec{y} \perp \vec{x} - \vec{y}$$

PROPOSICION

Para todo paralelogramo (a, b, c, d) :

$$\|\overrightarrow{ab}\| = \|\overrightarrow{ac}\| \iff \overrightarrow{ad} \perp \overrightarrow{cb}$$

DEFINICION

El paralelogramo (a, b, c, d) *es un* **rombo**

ssi

se cumple una de las condiciones equivalentes de la proposición.

DEMOSTRACION :

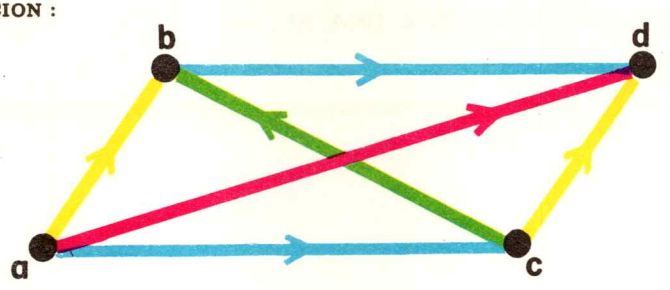


FIG. 215

$$\|\vec{x}\| = \|\vec{y}\| \iff \vec{x} + \vec{y} \perp \vec{x} - \vec{y}$$

$$\|\overrightarrow{ab}\| = \|\overrightarrow{ac}\| \iff \overrightarrow{ad} \perp \overrightarrow{cb}$$

l.q.q.d.

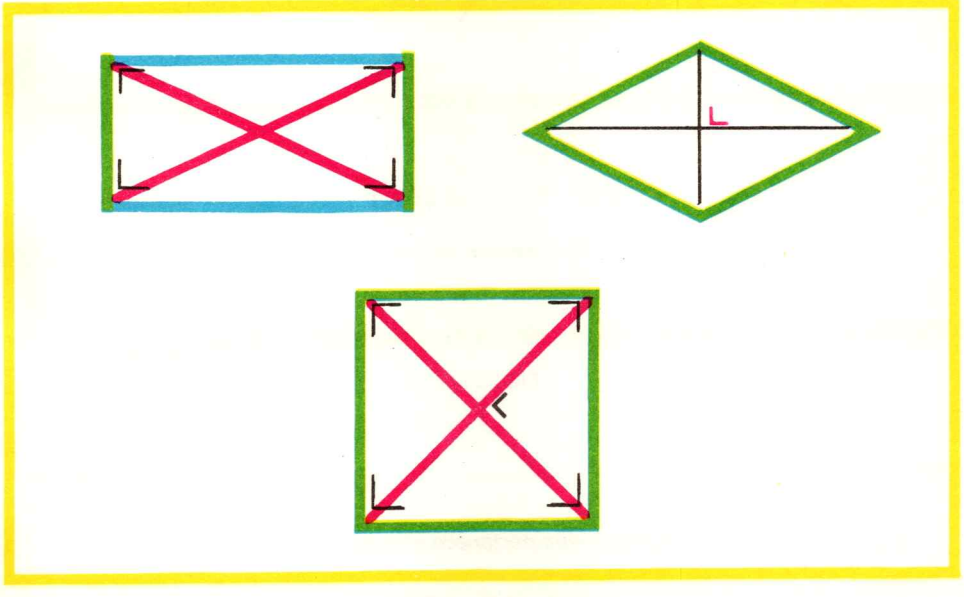
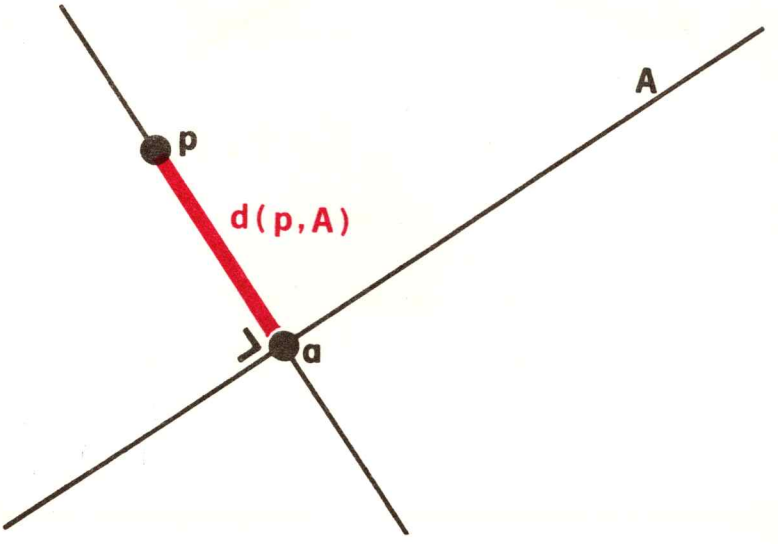


FIG. 216

6 – DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA

DEFINICION



$d(p, A) = d(p, a)$

es la **distancia** *de p a* A

(10.8.)

FIG. 217

PROPOSICION —— $\forall p \in \Pi , \forall A \in \mathfrak{D}$

$d(p, A)$ es el menor número que pertenece al conjunto de las distancias

$$\{ d(p, x) \mid x \in A \}$$

O expresado de otro modo

PROPOSICION

$d(p, A)$ *es el mínimo de* $\{ d(p, x) \mid x \in A \}$

Se escribe

$$d(p, A) = \min \{ d(p, x) \mid x \in A \}$$

DEMOSTRACION :

$$\forall x \in A \setminus \{a\} : \left(d(p, x)\right)^2 = \left(d(p, a)\right)^2 + \left(d(a, x)\right)^2$$

$$\left(d(p, x)\right)^2 > \left(d(p, a)\right)^2 \qquad \left(\text{pues } d(a, x) > 0\right)$$

$d(p, x)$ y $d(p, a)$ son reales positivos.

Por tanto $d(p, x) > d(p, a)$

l.q.q.d.

7 – CALCULO DEL PRODUCTO ESCALAR EN EJES RECTANGULARES

Tenemos dos rectas perpendiculares
E_1 , E_2
provistas de referencias métricas
que señalan el 0 en el punto de intersección.

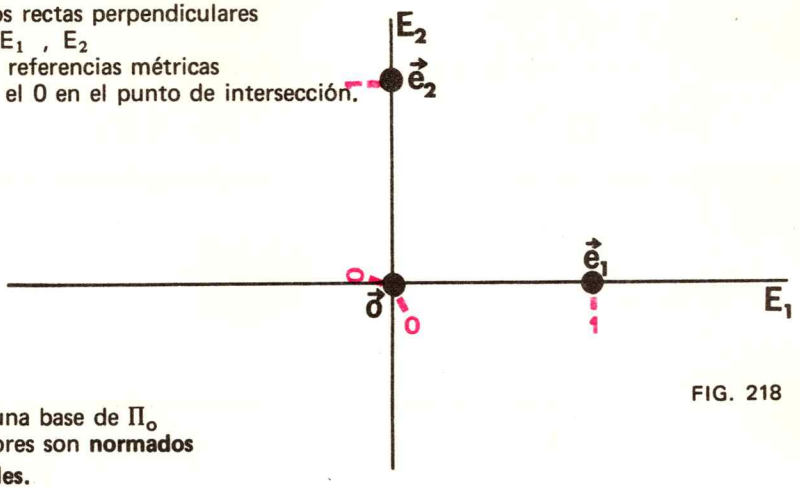


FIG. 218

$\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ es una base de Π_o
cuyos vectores son **normados**
y **ortogonales.**

Dichas bases se denominan **ortonormales.**

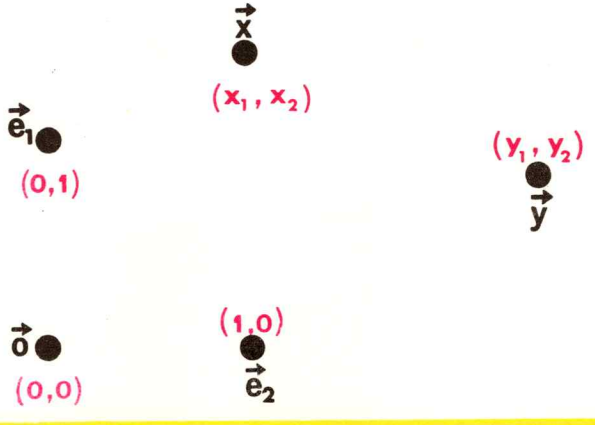
$\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ es una base **ortonormal**

ssi

$\| \vec{e}_1 \| = \| \vec{e}_2 \| = 1$ y $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$

ssi

$\vec{e}_1^{\,2} = \vec{e}_2^{\,2} = 1$ y $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0$



BASE ORTONORMAL

FIG. 219

Problema **(Base ortonormal)**

He aquí $\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2$ $\vec{y} = y_1 \vec{e}_1 + y_2 \vec{e}_2$

Calcular $\vec{x} \cdot \vec{y}$

Solución :

Se calcula $\vec{x} \cdot \vec{y} = (x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2) \cdot (y_1 \vec{e}_1 + y_2 \vec{e}_2)$

aplicando la bilinealidad y teniendo en cuenta

$$\vec{e}_1^{\,2} = \vec{e}_2^{\,2} = 1 \qquad \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0$$

$\vec{x} \cdot \vec{y}$

$= (x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2) \cdot (y_1 \vec{e}_1 + y_2 \vec{e}_2)$

$= x_1 y_1 \cdot \vec{e}_1 \vec{e}_1 + x_1 y_2 \cdot \vec{e}_1 \vec{e}_2 + x_2 y_1 \cdot \vec{e}_2 \vec{e}_1 + x_2 y_2 \cdot \vec{e}_2 \vec{e}_2$

$= x_1 y_1 \cdot 1 + x_1 y_2 \cdot 0 + x_2 y_1 \cdot 0 + x_2 y_2 \cdot 1$

$= x_1 y_1 + x_2 y_2$

Respuesta *(Base ortonormal)*

Si $\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2$ $\vec{y} = y_1 \vec{e}_1 + y_2 \vec{e}_2$

Entonces $\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2$

8 – RECTAS PERPENDICULARES

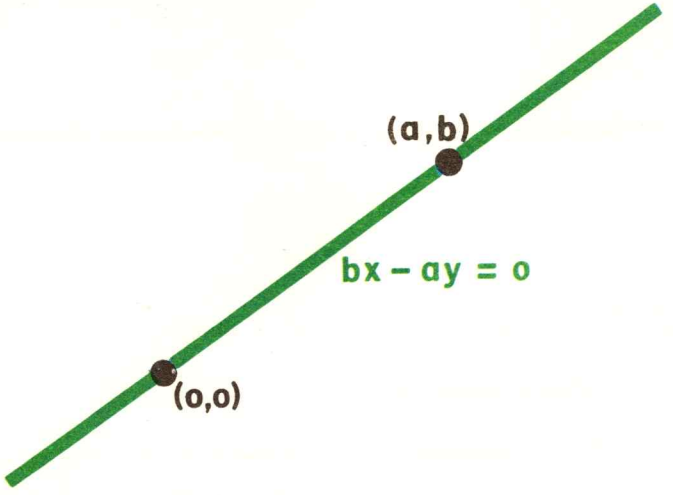


FIG. 220

MM2, Cap. 16

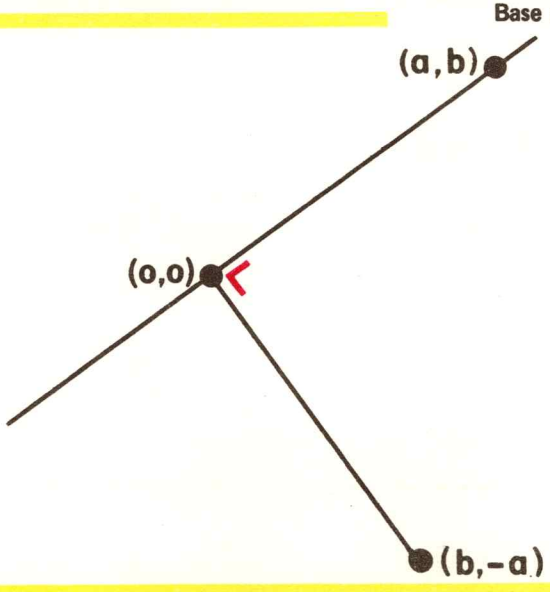


FIG. 221

puesto que $(a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2) \cdot (b\vec{e}_1 - a\vec{e}_2) = 0$

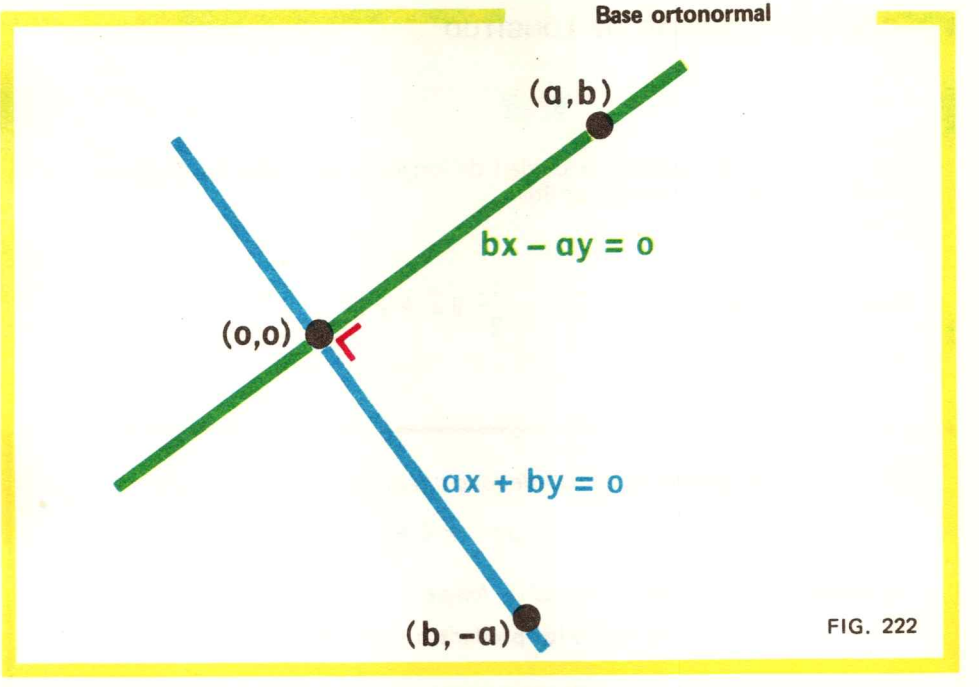


FIG. 222

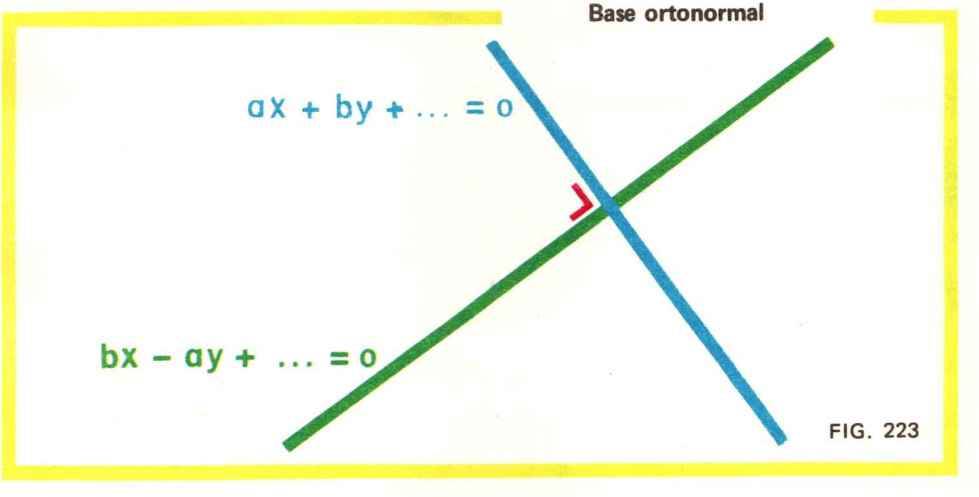


FIG. 223

EJERCICIO

En base ortonormal : Ecuación de la recta que comprende a (2 , 3) y es perpendicular a la recta $4x + 5y + 6 = o$

9 – CAMBIO DE UNIDAD DE LONGITUD

Sabemos que todo cambio de unidad de longitud multiplica las distancias por un mismo número real estrictamente positivo.

Para todo $\vec{x}, \vec{y} \in \Pi_o$: $\vec{x}\,\vec{y} = \frac{1}{2} \| \vec{x} + \vec{y} \|^2 - \| \vec{x} \|^2 - \| \vec{y} \|^2$

Si *un cambio de unidad de longitud multiplica las distancias por* $k \in \mathbf{R}_o^+$

Entonces *este cambio de unidad de longitud* **multiplica los productos escalares por** $\mathbf{k^2}$

Para toda cupla de vectores no nulos $\vec{x}, \vec{y}$:

$$\cos(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\| \vec{x} \| \cdot \| \vec{y} \|}$$

El cambio de unidad de longitud multiplica el numerador y el denominador por k^2 dejando, por tanto, $\cos(\vec{x}, \vec{y})$ fijo.

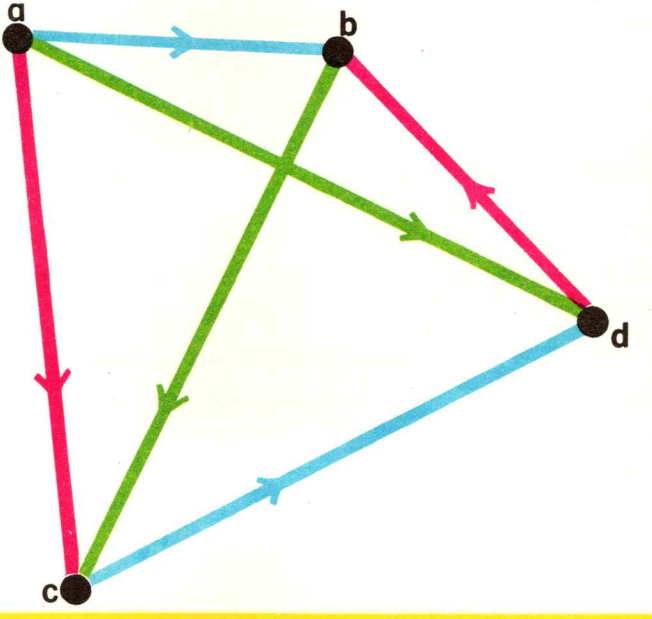
El coseno es independiente de la elección de unidad de longitud.

10 – EJERCICIOS

1. **Si** $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in \Pi_o$

Entonces $(\vec{a} - \vec{b})(\vec{c} - \vec{d}) + (\vec{a} - \vec{c})(\vec{d} - \vec{b}) + (\vec{a} - \vec{d})(\vec{b} - \vec{c}) = o$

O expresado en otra forma, para todo $a, b, c, d \in \Pi$:



La suma de los productos escalares de las cuplas de vectores azules, verdes y rojos es nula.

FIG. 224

2. **Si** a, b, c designan tres puntos no alineados de Π

Entonces toda altura del triángulo a, b, c corta a las demás alturas de dicho triángulo.

3. **Si** $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in \Pi_o$

Entonces $\vec{a} - \vec{b} \perp \vec{c} - \vec{d}$ y $\vec{a} - \vec{c} \perp \vec{d} - \vec{b} \implies \vec{a} - \vec{d} \perp \vec{b} - \vec{c}$

O expresado de otra forma

Si a, b, c, d son distintos puntos de Π

Entonces $ab \perp cd$ y $ac \perp bd \implies ad \perp bc$

4. El punto d pertenece a la altura correspondiente al vértice a del triángulo $a\ b\ c$

ssi

$$\vec{a} - \vec{d} \perp \vec{b} - \vec{c}$$

Expresar condiciones análogas para los demás vértices.

5. **Si** a, b, c designan a tres puntos no alineados,

Entonces las tres alturas del triángulo $a\ b\ c$ se cortan en un mismo punto llamado **ortocentro** del triángulo.

6. **Si** a, b, c, d designan a cuatro puntos diferentes de Π

Entonces d es el ortocentro de $a\ b\ c$

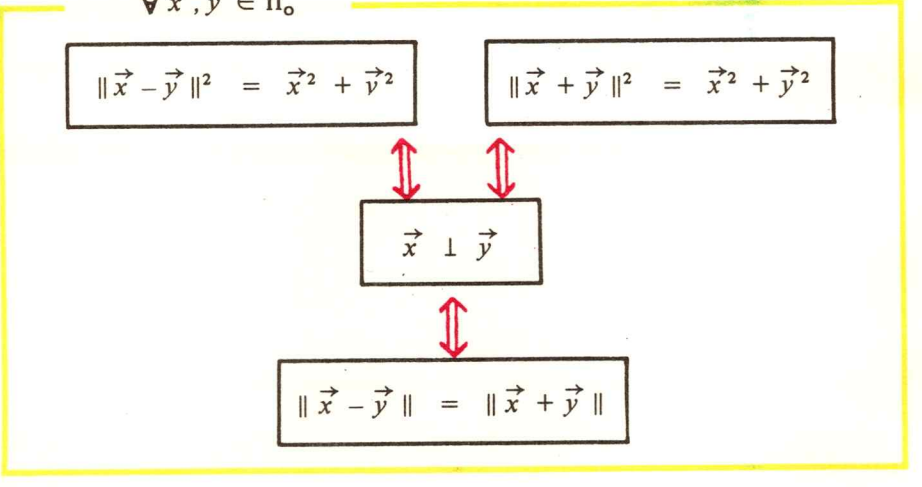
ssi

c es el ortocentro de $a\ b\ d$

ssi

...

7. $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \Pi_o$



8. Para todo $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \Pi_o$ y para todo $a, b \in \mathbf{R}$:

$$\vec{x} \perp \vec{y} \quad \text{y} \quad \vec{x} \perp \vec{z} \implies \vec{x} \perp a\vec{y} + b\vec{z}$$

9. **Si** los vectores $\vec{x}, \vec{y}$ no son paralelos

Entonces todo vector de Π_o se expresa $a\vec{x} + b\vec{y}$ (con $a, b \in \mathbf{R}$)

10. **Si** los vectores $\vec{x}, \vec{y}$ no son paralelos

Entonces todo vector ortogonal a $\vec{x}$ y a $\vec{y}$

... es ortogonal a todo vector de Π_o

... y es el vector nulo (ver el ejercicio 7).

11. **Si** los vectores $\vec{x}, \vec{y}$ pertenecientes a Π_o no son paralelos

Entonces existen $a, b \in \mathbf{R}$ tales que $\vec{x} \perp a\vec{x} \perp b\vec{y}$

12. Deducir de los ejercicios 10 y 11 que para todo vector no nulo $\vec{x}$

$\{\vec{y} \in \Pi_o \mid \vec{x} \perp \vec{y}\}$ es una recta vectorial.

13. Cambiar la unidad de longitud equivale a

multiplicar todas las longitudes por un mismo número positivo k

multiplicar todos los productos escalares por k^2

multiplicar todos los cosenos por k^0

14. Toda permutación del plano que conserva las longitudes, conserva los productos escalares.

15. He aquí $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \Pi_o$ (con $\vec{a} \neq \vec{b}$)

Halla la ecuación de la recta X definida por $\vec{a} \in X \perp bc$

Respuesta

$$X = \{ \vec{x} \in \Pi_o \mid (\vec{x} - \vec{a})(\vec{b} - \vec{c}) = o \}$$

$$X \equiv (\vec{x} - \vec{a})(\vec{b} - \vec{c}) = o$$

16. Si los puntos $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ de Π_o no se hallan alineados y $\vec{o}$ es el centro de la circunferencia que contiene a $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

Entonces la intersección de las alturas del triángulo $a\,b\,c$ es el conjunto unitario $\{ \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \}$

DEMOSTRACION :

Si h_a, h_b, h_c son las alturas del triángulo

Entonces

$$h_a \equiv (\vec{x} - \vec{a})(\vec{b} - \vec{c}) = o$$

$$h_b \equiv (\vec{x} - \vec{b})(\vec{c} - \vec{a}) = o$$

$$h_c \equiv (\vec{x} - \vec{c})(\vec{a} - \vec{b}) = o$$

$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ pertenece a h_a pues

$$(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} - \vec{a})(\vec{b} - \vec{c}) = \| \vec{b} \|^2 - \| \vec{c} \|^2 = o$$

Igualmente se demuestra que $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ pertenece a h_b y a h_c

17. Si los puntos $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ de Π_o no están alineados

Entonces la intersección de las medianas del triángulo $a\,b\,c$ es el conjunto unitario $\left\{ \dfrac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3} \right\}$

18. Si los puntos $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ de Π_o no están alineados,

$\vec{o}$ es el centro de la circunferencia que comprende a $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

$\vec{g}$ es el baricentro de $a\,b\,c$

$\vec{h}$ es el ortocentro de $a\,b\,c$

Entonces $\vec{h} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

$\vec{g} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$

de donde $\vec{h} = 3\,\vec{g}$

19. Si los puntos $\vec{x}, \vec{y}, \vec{c}$ de Π_o no están alineados

$\vec{c}$ es el centro de la circunferencia circunscrita a $x\,y\,z$

$\vec{g}$ es el baricentro de $x\,y\,z$

$\vec{h}$ es el ortocentro de $x\,y\,z$

Entonces los puntos $\vec{c}, \vec{g}, \vec{h}$ están alineados (recta de Euler)

y $\vec{h} - \vec{c} = 3(\vec{g} - \vec{c})$

20. Si $\Gamma = \{ \vec{x} \in \Pi_o \mid d(\vec{x},\vec{c}) = r \}$

$\vec{p} \in \Pi_o$

$\vec{a}, \vec{b}$ son dos puntos diametralmente opuestos de Γ

Entonces $(\vec{p} - \vec{a}) \cdot (\vec{p} - \vec{b}) = \left(d(\vec{p}, \vec{c})\right)^2 - r^2$

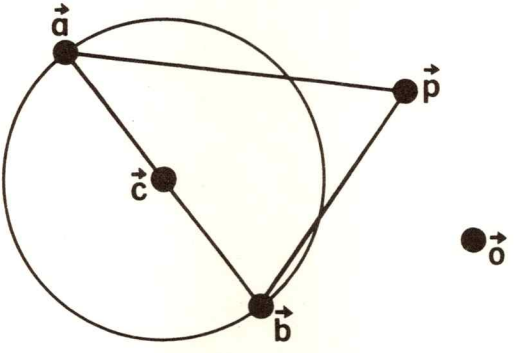


FIG. 225

21. Igual notación que para el ejercicio anterior.

$(\vec{p} - \vec{a})\,(\vec{p} - \vec{b})$ sólo depende de $\vec{p}$ y de la circunferencia Γ y no de la elección particular del punto $\vec{a} \in \Gamma$

El número real $\left(d(\vec{p}\,, \vec{c}) \right)^2 - r^2$ se denomina **potencia** del punto p con respecto a la circunferencia de centro c y radio r

22. Igual notación que para el ejercicio 20.

Para todo $p \in \Pi$:

$p \in \Delta\,(c\,, r) \iff$ la potencia de p con respecto a Γ es negativa.

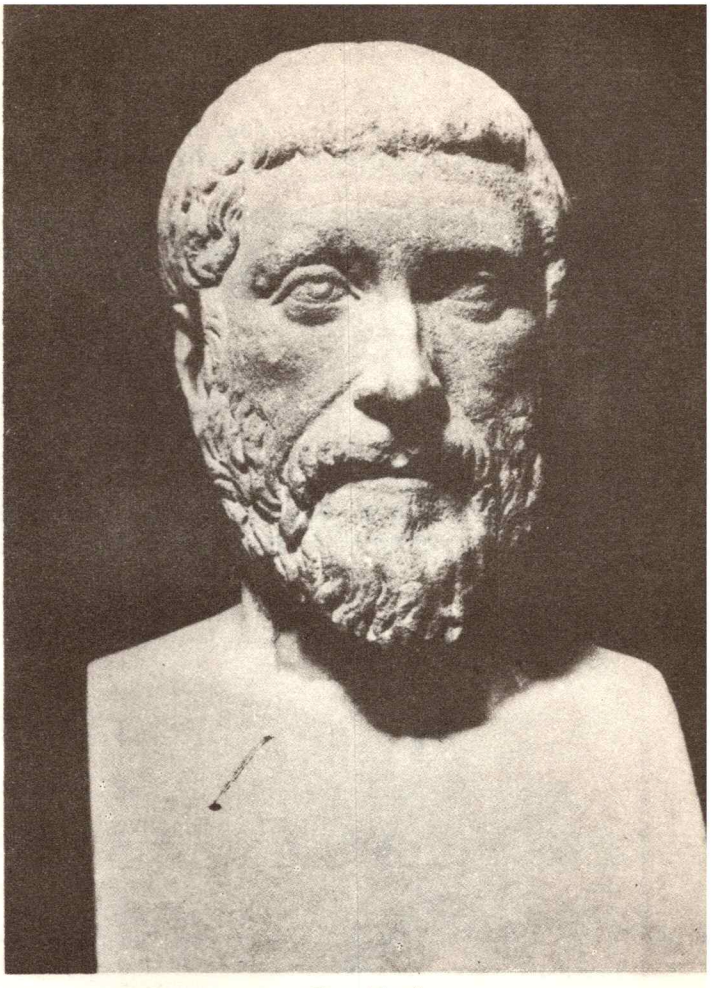
$p \in \Gamma\,(c\,, r) \iff$ la potencia de p con respecto a Γ es nula

$p \in \Pi \setminus \Delta\,(c\,, r) \iff$ la potencia de p con respecto a Γ es positiva.

PITAGORAS
(–569 al – 500)

PITAGORAS es el único ejemplo de matemático-filósofo, jefe de una sociedad secreta cuyos miembros, sometidos a estricta disciplina, poseían sus bienes en común, observanban reglas de vida más bien ascéticas, compartían idénticas ideas religiosas, filosóficas y científicas y se comprometían mediante juramento a conservar secretas las enseñanzas de la ESCUELA.

Como PITAGORAS prohibía el uso de manuales, las referencias sobre su vida, sobre su ESCUELA, y sus descubrimientos son inciertas y se fundan frecuentemente en alguno que otro documento aislado, escrito a veces mucho más tarde y limitándose tal vez a recoger tradiciones orales en las que resulta difícil separar la verdad de la fábula.



(Photo Alinari)

Nacido en **Samos** en –569, PITAGORAS fue contemporáneo de THALES (–600).

Después de efectuar viajes de estudio en **Egipto** y en **Asia Menor**, volvió a **Samos** y organizó algunos cursos sin mayores éxitos.

Hacia la edad de 40 años, emprendió nuevos viajes hacia **Sicilia** y **Tarento** y se estableció, por fin, en **Crotona**.

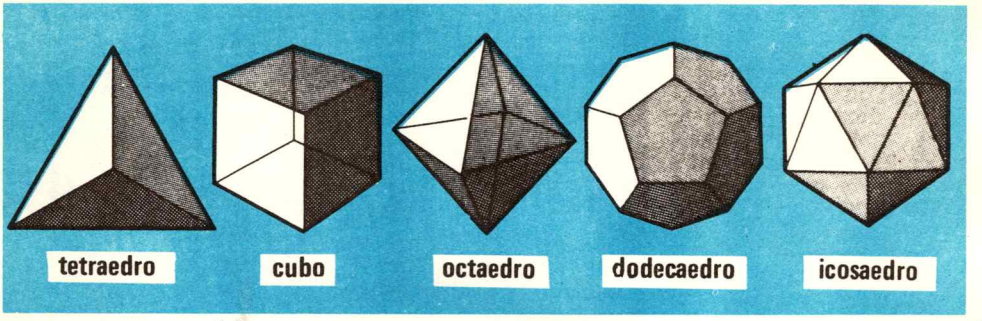
Gracias a la hospitalidad de Milo –a quien agradeció casándose con su hermosa hija– PITAGORAS fundó su famosa ESCUELA que atrajo pronto a numeroso y entusiasta público, reclutado, en su mayor parte, entre lo más granado de la sociedad.

Los alumnos se dividieron en *oyentes y matemáticos.*

Al cabo, aproximadamente de tres años, los oyentes podían ser admitidos en la segunda clase, la de los auténticos PITAGORICOS, los que se comprometen con el secreto y se inician y perfeccionan en los principales descubrimientos de la ESCUELA.

Los descubrimientos se dicen realizados en común, pero la gloria de los mismos se reserva al Fundador.

Se refiere que hacia −470, HIPPASOS fue ahogado por haberse atribuido públicamente la adición del icosaedro a los polígonos regulares convexos ya conocidos por los PITAGORICOS



Para reconocerse entre ellos, los PITAGORICOS utilizaban símbolos secretos y con preferencia el Pentagrama o Pentágono estrellado regular, emblema de la salud. JAMBICO, a quien se debe la revelación del Pentagrama, refiere, al respecto, esta interesante anécdota.

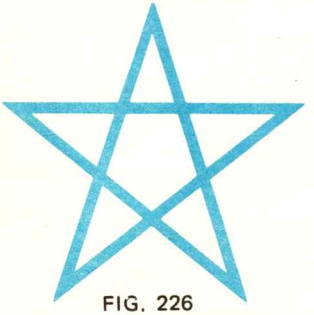


FIG. 226

Un PITAGORICO desprovisto de dinero cayó enfermo en un albergue.

Presintiendo su próxima muerte, pidió al dueño del albergue que expusiera en el frente del mismo el Pentagrama.

Muchos años después un PITAGORICO que pasó por allí vio el símbolo, requirió del dueño del albergue noticias sobre su origen y al enterarse lo recompensó generosamente.

Partidarios del despotismo manifiesto, los PITAGORICOS reclamaron la dirección del Estado para los hombres más competentes, exigiendo la obediencia absoluta a las autoridades.

La estricta disciplina de la organización de sus afiliados en **Crotona** y en las ciudades vecinas dotó a los PITAGORICOS de tal fuerza política que los tornó por el momento todopoderosos.

En −501, un golpe de estado exterminó a la mayor parte de los PITAGORICOS importantes, incendiando la residencia de MILO.

PITAGORAS huyó a **Tarento** y después a **Metafonte** donde fue muerto en −500 en otra revuelta.

* * *

Después de la muerte de PITAGORAS su ESCUELA, políticamente aniquilada, se reorganizó en **Taranto** como sociedad filosófica y matemática y alcanzó nueva prosperidad durante más de un siglo.

Lentamente, la ley del secreto no se tuvo ya en cuenta y en −370 PHILOLAO publicó el primer compendio de las enseñanzas de los PITAGORICOS

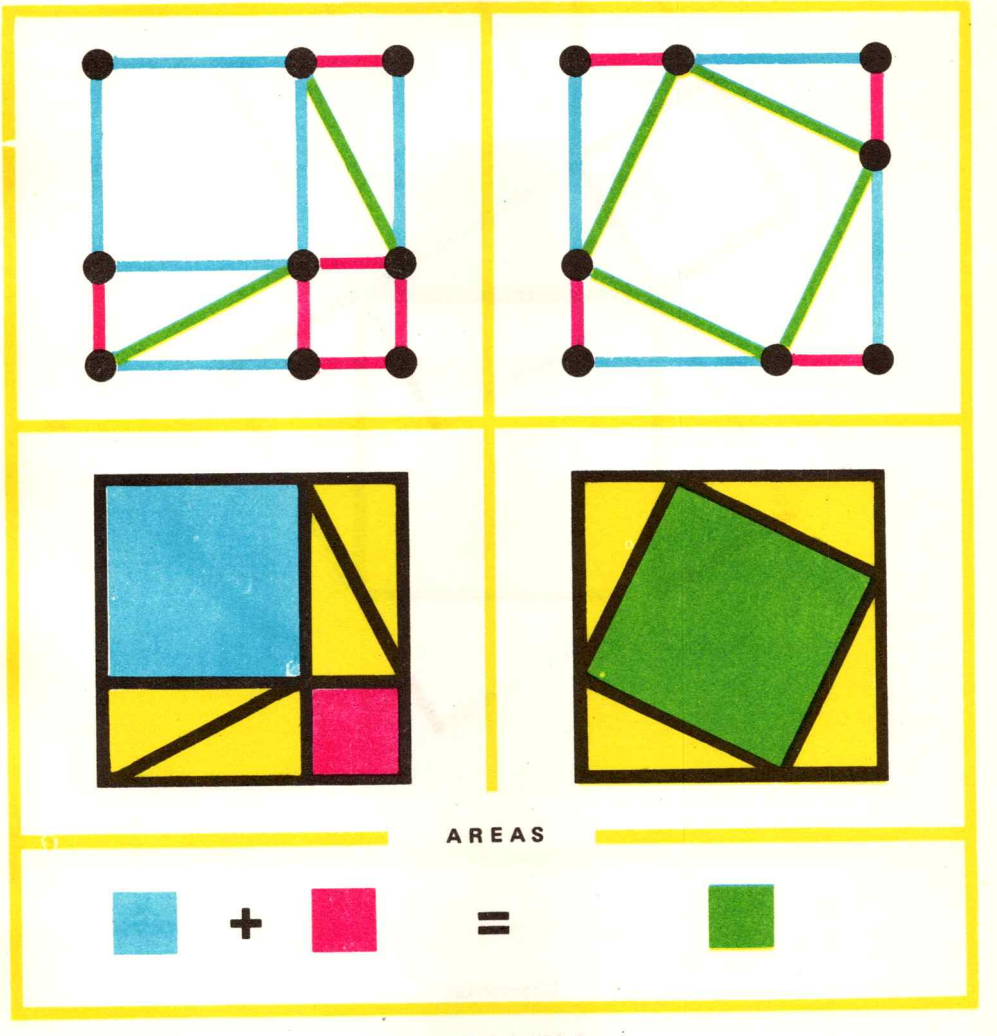
En esta época los PITAGORICOS perdieron la dirección de la matemática que tuvieran durante la primera mitad del siglo V antes de Jesucristo.

* * *

PITAGORAS convirtió la matemática en la base de enseñanza de una sociedad religiosa y filosófica rigurosa y extendió las implicaciones de su doctrina hasta la política. Fue el primero en la Historia que reconoció de manera tan absoluta como universal el papel de la matemática en el Humanismo y en la formación del pensamiento.

Los PITAGORICOS enriquecieron considerablemente el arsenal de proposiciones geométricas. Conocían los dos primeros libros de los elementos de Euclides y proposiciones aisladas sobre los números reales que orientaron los adelantos geométricos.

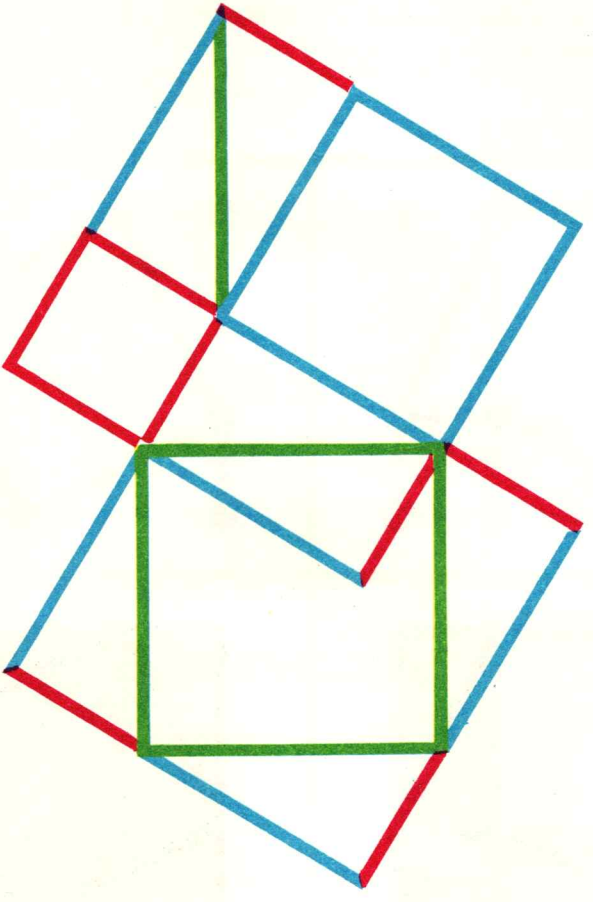
Se atribuye especialmente a PITAGORAS el famoso Puente de los burros que establecemos hoy tan fácilmente mediante el producto escalar. Se cree generalmente que PITAGORAS demostró este teorema fundándose en la noción intuitiva de área.



PONTESIMA

FIG. 227

PONTESIMA



¡Comenta!

FIG. 228

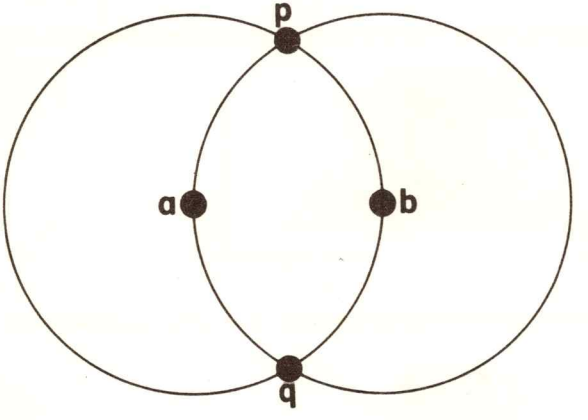
Para los PITAGORICOS la regla y el compás tenían un carácter sagrado. Toda construcción geométrica que utilizase otro instrumento les parecía una especie de herejía.

Construcción, "sin pecar" del punto medio del segmento $[a\,b]$ de longitud d

Construcción de las circunferencias $A = \Gamma(a, d)$ y $B = \Gamma(b, d)$

La suma de los radios $2d$ es estrictamente mayor que la distancia de los centros d

La intersección $A \cap B$ comprende un par de puntos



$A \cap B = \{p, q\}$

$d(a, p) = d(p, b) = d(a, q) = d(q, b)$

FIG. 229

La recta $p\,q$ es la mediatriz de $[a\,b]$; corta, por tanto a $a\,b$ en el punto medio medio m de $[a\,b]$

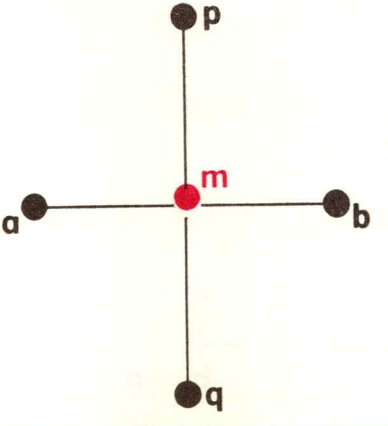


FIG. 230

Ahora resulta fácil construir sin "pecar" la circunferencia de diámetro [$a\,b$]

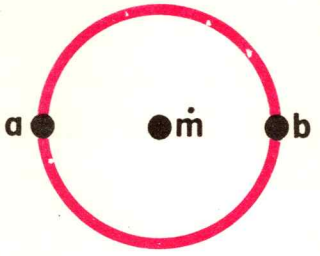


FIG. 231

En la época en que la teoría de los números reales apenas se había esbozado, las proposiciones

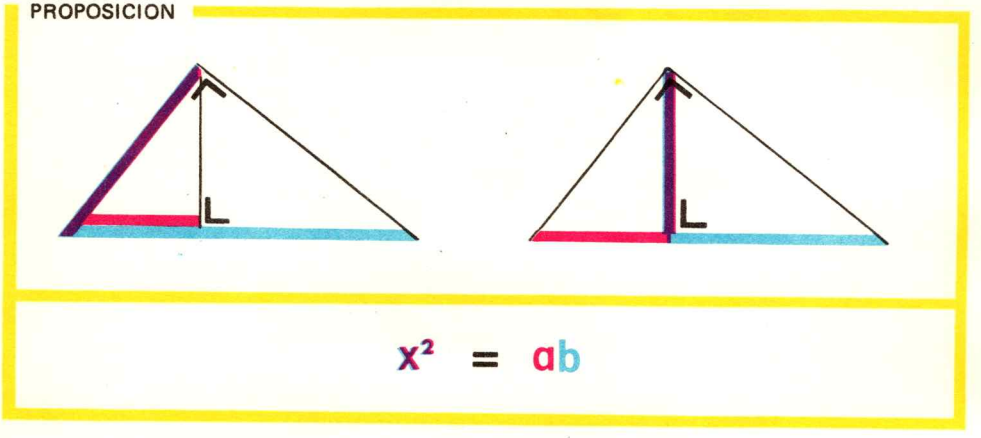


FIG. 232

conocidas por los PITAGORICOS, revestían una especial importancia, puesto que permitían construir sin pecar $\sqrt{a \cdot b}$, conociendo a y b

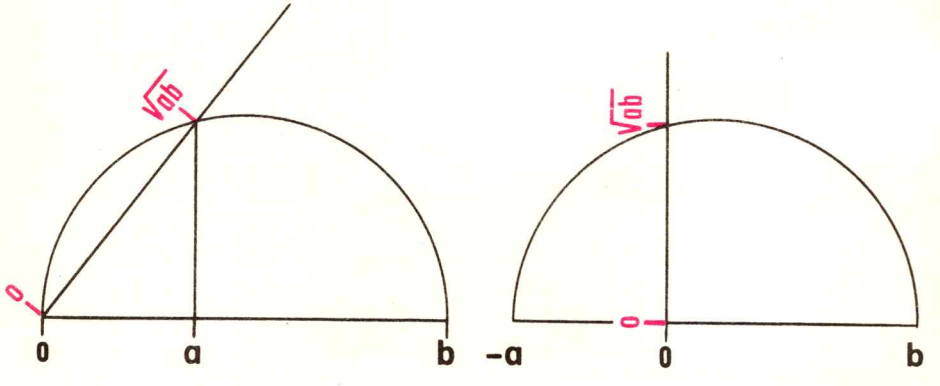


FIG. 233

Si $b = 1$

Entonces el método precedente permite construir $\sqrt{a}$ para todo $a \in \mathbb{R}^+$

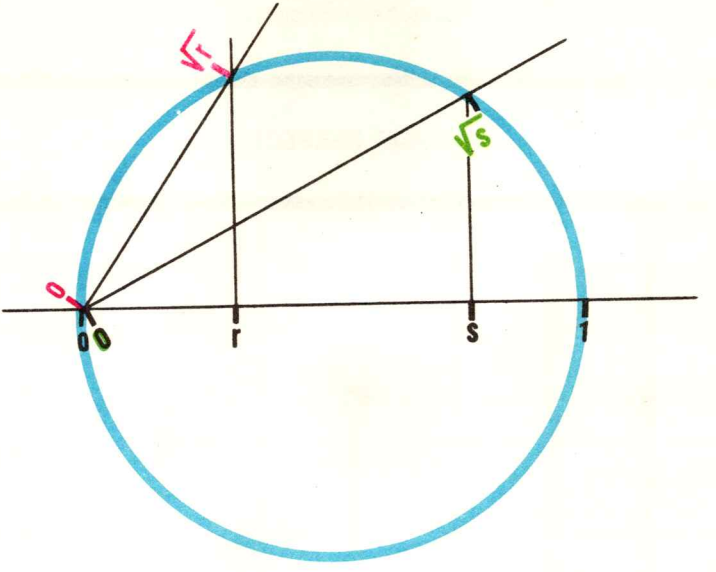


FIG. 234

* * *

Enfrentado con el problema de la enseñanza de la matemática a diferentes niveles, PITAGORAS respondía a un imperativo pedagógico al organizar los conocimientos geométricos –enriquecidos por su ESCUELA y por él mismo– como un edificio inteligible, rigurosamente eslabonado.

A partir de PITAGORAS, la geometría adquiere el aspecto que le ha sido reconocido a lo largo de los siglos, como una ciencia rigurosa y armónicamente organizada.

Como sucede a menudo, en sus primeros ensayos, la presentación de PITAGORAS no se halla exenta de brumas metafísicas. Se admite generalmente que el recurrir a ciertos principios filosóficos, sostenía a veces un razonamiento cuya lógica no era siempre impecable.

Las tentativas de la Antigüedad por construir el edificio matemático, fueron coronadas (hacia –300) por la obra monumental de los *Elementos* de EUCLIDES, presentados durante veinte siglos como el modelo de una ciencia deductiva rigurosamente organizada.

En el siglo XIX el rigor matemático se torna más exigente y las deficiencias de la obra de EUCLIDES se ponen en evidencia.

Con los *Grundlagen* de HILBERT (1899), la Humanidad dispone, finalmente, de una exposición de la geometría elemental, considerada aún como rigurosa por los matemáticos profesionales de nuestros días.

* * *

Los PITAGORICOS fueron sumamente impresionados al descubrir las relaciones entre los números y la música.

Se pasa de una nota a su octava reduciendo a su mitad la longitud de la cuerda de un instrumento músico (como lo hacen habitualmente los artistas).

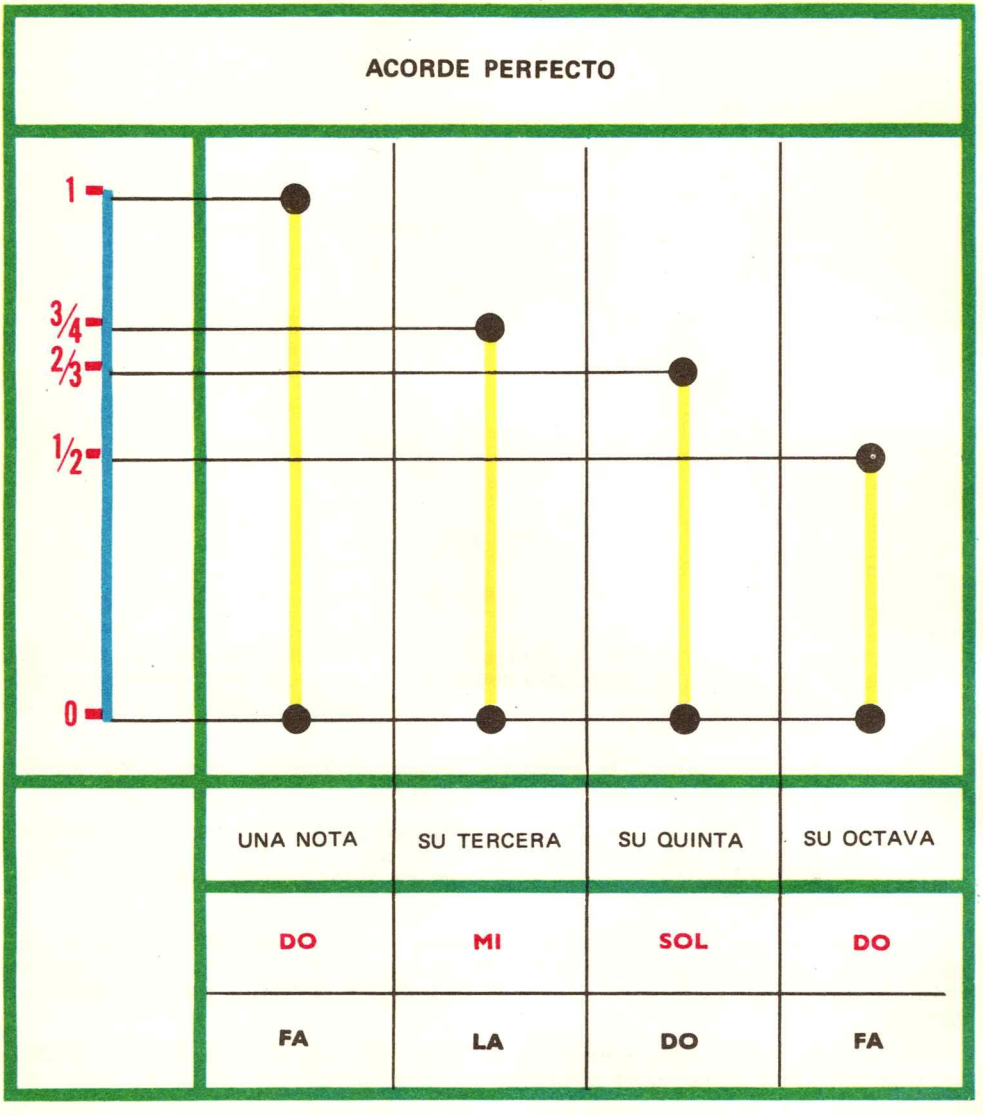


FIG. 235

Por el estudio desinteresado de la aritmética que sobrepasó las necesidades prácticas, los PITAGORICOS se nos presentan como precursores de las teorías de los números.

MAXIMA PITAGORICA

Una figura es un paso adelante
y no una cifra para ganar tres óbolos

Los PITAGORICOS se ocupan especialmente de los números poligonales que interesaron a FERMAT, GAUSS, CAUCHY.

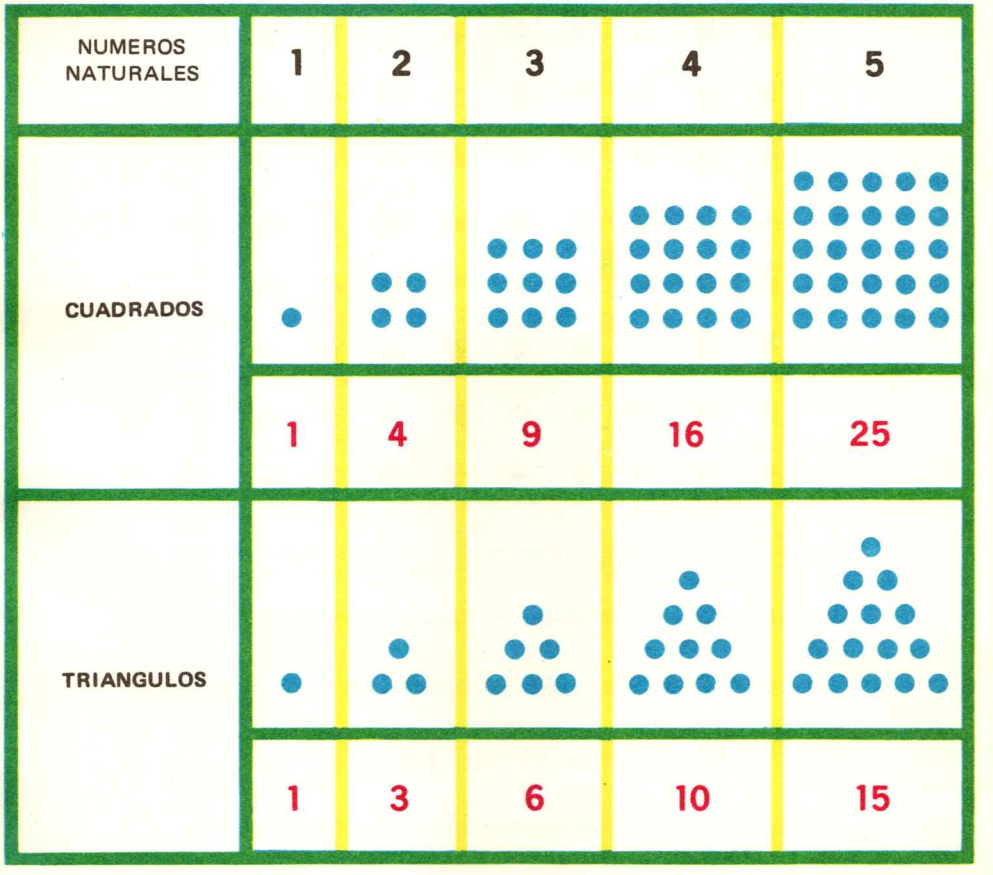


FIG. 236

Los números impares se denominan gnomones.

Números naturales	1	2	3	4	5		n
GNOMONES	3	5	7	9	11		2n+1

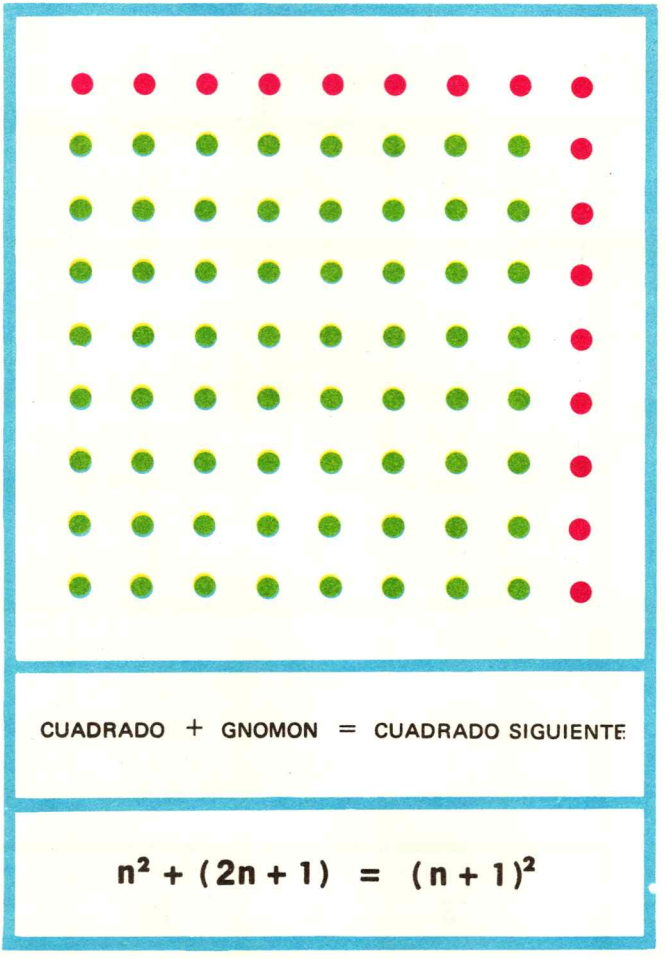


FIG. 237

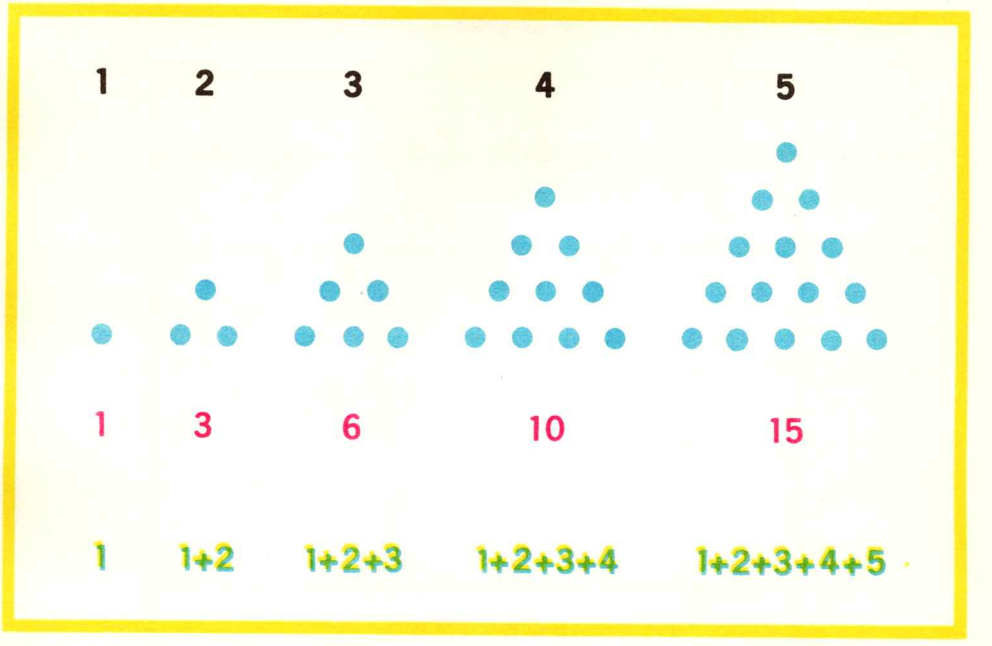


FIG. 238

EL TRANSEUNTE – ¿Qué puedes enseñarme?

PITAGORAS – Te enseñaré a contar.

EL TRANSEUNTE – ¡Eso ya lo sé hacer!

PITAGORAS – ¿En qué forma?

EL TRANSEUNTE – Uno, dos, tres, cuatro, c...

PITAGORAS – ¡Detente!
Lo que tomas por cuatro es en realidad diez :
un triángulo perfecto es nuestro símbolo.

LUCIANO (siglo II°) – Diálogo *"Los Filósofos en Subasta"*, cap. 4.

Sea verdadera o falsa esta anécdota, ella pone en evidencia el lenguaje enigmático que voluntariamente utilizaban los miembros de una sociedad secreta con relación a los profanos.

PITAGORAS y los PITAGORICOS ¿jugaban al bowling?

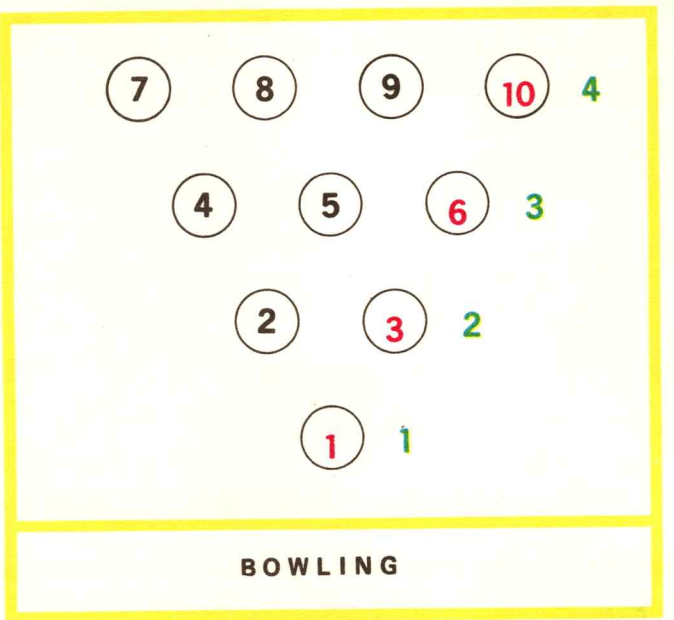


FIG. 239

En el bowling también, los no iniciados podrían designar 4
a la quilla número 10

Aunque no disponían de la notación moderna, los PITAGORICOS conocían la fórmula que determina el triángulo del número natural n.

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{2}(n^2 + n)$$

$$n + n^2 = 2(1 + 2 + \ldots + n)$$

La suma de un número natural y de su cuadrado es igual al doble de su triángulo

Los PITAGORICOS establecieron, probablemente, esta fórmula razonando como sigue :

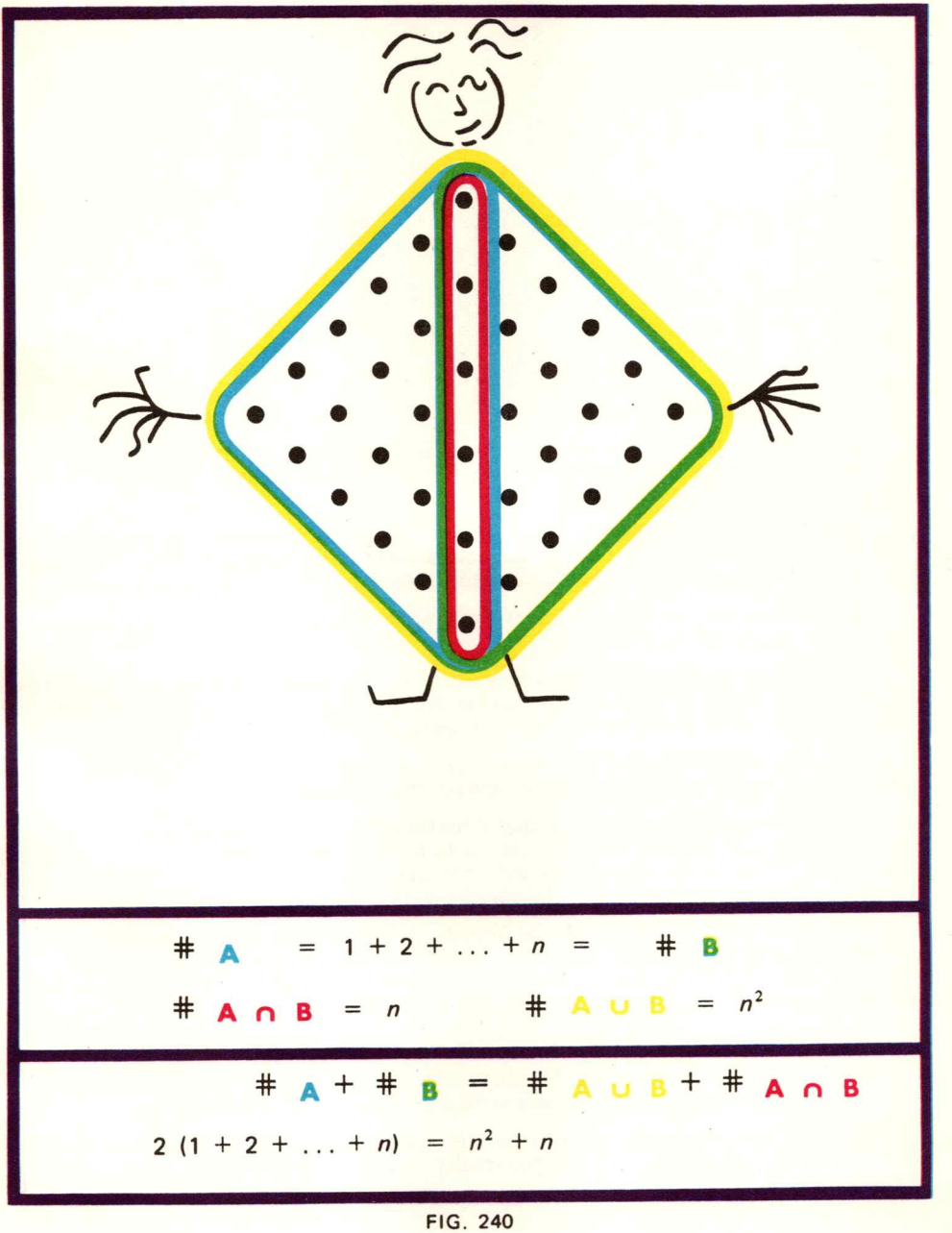


FIG. 240

Se refiere que GAUSS, todavía niño, estableció inmediatamente esta fórmula por la astucia :

$$
\begin{aligned}
& 2\,(\,1 + 2 + \ldots + (n-1) + n\,) \\
= \quad & 1 + 2 + \ldots + (n-1) + n \\
& + \; n + (n-1) + \ldots + 2 + 1 \\
= \quad & (n-1) + (n+1) + \ldots + (n+1) + (n+1) \\
= \quad & n\,(n+1)
\end{aligned}
$$

l.q.q.d.

La Regla de los PITAGORICOS les exigía determinar cada mañana un plan de trabajo para la jornada. Después de la cena se reunían para realizar la síntesis de la jornada y comparar las realizaciones con el plan matinal.

A fuer de buen pedagogo, PITAGORAS había comprendido que la inteligencia y una aptitud espontánea no pueden ser condiciones suficientes para llevar a terímino los estudios científicos o para obtener resultados positivos con probabilidades de éxito.

El aprendizaje y la creación científica implican una estricta disciplina y un agudo sentido de organización personal.

Un plan de estudio y de trabajo, periódicamente adaptado a los progresos efectivamente realizados, se impone para evitar las tentativas eternamente inconclusas y la repetición de esfuerzos que se traducen en pura pérdida.

Para ser eficaz, un plan de trabajo debe realizarse y preverse con precisión, de acuerdo con las posibilidades y en un tiempo bien determinado.

La experiencia sólo permite adquirir lentamente la visión de tal evaluación. La regla pitagórica que consiste en examinar cada tarde el trabajo cumplido de acuerdo con lo previsto, es sin duda uno de los métodos más eficaces para llegar finalmente a una organización fecunda del trabajo, del estudio y de las creaciones científicas.

Consagrar la última parte de la jornada a una síntesis es un consejo que dan a menudo los pedagogos y psicólogos modernos. Se admite que las nociones *nuevas* adquiridas antes del sueño dejan escasa huella. Corren el riesgo de ser absorbidas a prisa por la ansiedad de falta de tiempo para comprenderlas.

Se aprende eficazmente solo cuando se ha perdido la angustia de no comprender.

La síntesis efectuada antes del sueño, favorece la fijación de las nociones aprendidas y proporciona la ocasión de una crítica de los resultados adquiridos.

Aún hoy los estudiosos e investigadores manifiestan marcado interés en inspirarse de un modo razonable en ciertas reglas sugeridas hace veinticinco siglos por PITAGORAS.

13

Desigualdades

1 – PRODUCTO ESCALAR DE VECTORES NORMADOS

PROPOSICION

Si $\|\vec{e}\| = 1 = \|\vec{u}\|$

Entonces $|\vec{e} \cdot \vec{u}| \leqslant 1$

$$\vec{e} \cdot \vec{u} = 1 \iff \vec{e} = \vec{u}$$

$$\vec{e} \cdot \vec{u} = -1 \iff \vec{e} = -\vec{u}$$

$$|\vec{e} \cdot \vec{u}| = 1 \iff \vec{e} = \pm\vec{u}$$

DEMOSTRACION :

$$0 \leqslant (\vec{e} + \vec{u})^2$$

$$0 \leqslant 2 + 2\vec{e}\,\vec{u}$$

$$-1 \leqslant \vec{e}\,\vec{u}$$

$$0 \leqslant (\vec{e} - \vec{u})^2$$

$$0 \leqslant 2 - 2\vec{e}\,\vec{u}$$

$$\vec{e}\,\vec{u} \leqslant 1$$

$$-1 \leqslant \vec{e}\,\vec{u} \leqslant 1$$

$$|\vec{e}\,\vec{u}| \leqslant 1$$

$$\vec{e} = \vec{u} \implies \vec{e} \cdot \vec{u} = \vec{e}^2 = 1$$

$$\vec{e}\,\vec{u} = 1 \implies 2 - 2\vec{e}\,\vec{u} = 0 \implies (\vec{e} - \vec{u})^2 = 0 \implies \vec{e} = \vec{u}$$

$$\vec{e} = -\vec{u} \implies \vec{e} \cdot \vec{u} = -\vec{e}^2 = -1$$

$$\vec{e}\,\vec{u} = -1 \implies 2 + 2\,\vec{e} \cdot \vec{u} = 0 \implies (\vec{e} + \vec{u})^2 = 0 \implies \vec{e} = -\vec{u}$$

l.q.q.d.

2 – COSENO

TEOREMA $\quad \vec{x} \neq \vec{o} \neq \vec{y}$

$$|\cos(\vec{x},\vec{y})| \leqslant 1$$

$\cos(\vec{x},\vec{y}) = 1 \iff \vec{x},\vec{y}$ paralelos y del mismo sentido

$\cos(\vec{x},\vec{y}) = -1 \iff \vec{x},\vec{y}$ paralelos y de sentido opuesto

$|\cos(\vec{x},\vec{y})| = 1 \iff \vec{x},\vec{y}$ paralelos

DEMOSTRACION :

$$\cos(\vec{x},\vec{y}) = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} \cdot \frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|} \qquad \left(\text{y } \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}, \frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|} \text{ son normados}\right)$$

Por tanto, en virtud de la proposición del § 1 : $|\cos(\vec{x},\vec{y})| \leqslant 1$

$$\cos(\vec{x},\vec{y}) = 1 \overset{\S\,1}{\iff} \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} = \frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|} \iff \vec{x},\vec{y} \text{ paralelos y del mismo sentido.}$$

$$\cos(\vec{x},\vec{y}) = -1 \iff \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} = -\frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|} \iff \vec{x},-\vec{y} \text{ paralelos y del mismo sentido.}$$

l.q.q.d.

Hemos llegado al momento de reunir en un cuadro las propiedades del coseno deducidas de la fórmula

$$\cos(\vec{x},\vec{y}) = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|}$$

FORMULARIO DEL COSENO

$\vec{x} \neq \vec{0} \neq \vec{y}$

$|\cos(\vec{x}, \vec{y})| \leqslant 1$

$\cos(\vec{x}, \vec{y}) = 1 \iff \vec{x}, \vec{y}$ paralelas y del mismo sentido

$\cos(\vec{x}, \vec{y}) = -1 \iff \vec{x}, -\vec{y}$ paralelas y del mismo sentido

$$\cos(\vec{x}, \vec{y}) = \cos(\vec{y}, \vec{x})$$

$$\cos(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \iff \vec{x} \perp \vec{y}$$

$$\forall r, s \in \mathbf{R}_0^+ : \quad \cos(r\vec{x}, s\vec{y}) = \cos(\vec{x}, \vec{y})$$

$$\cos(\vec{x}, -\vec{y}) = -\cos(\vec{x}, \vec{y}) = \cos(-\vec{x}, \vec{y})$$

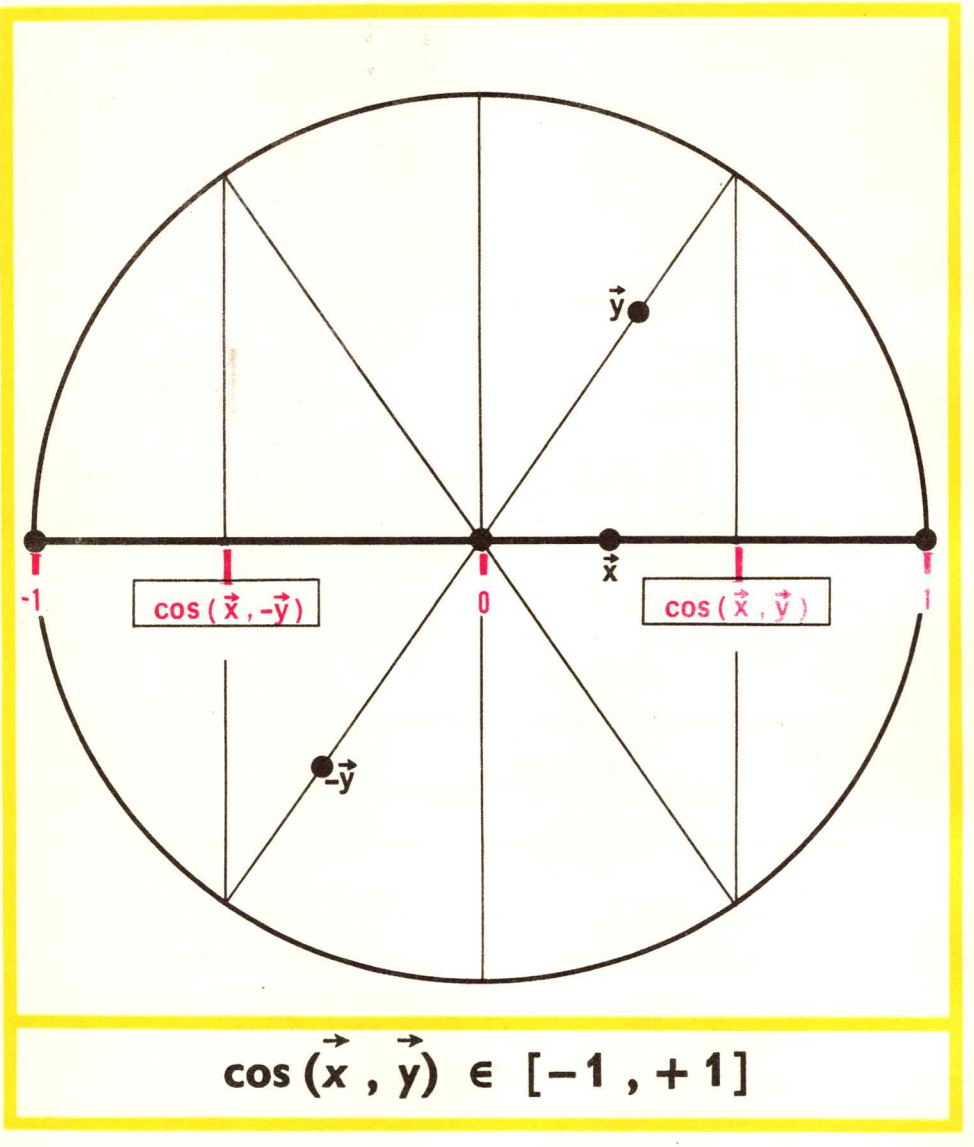
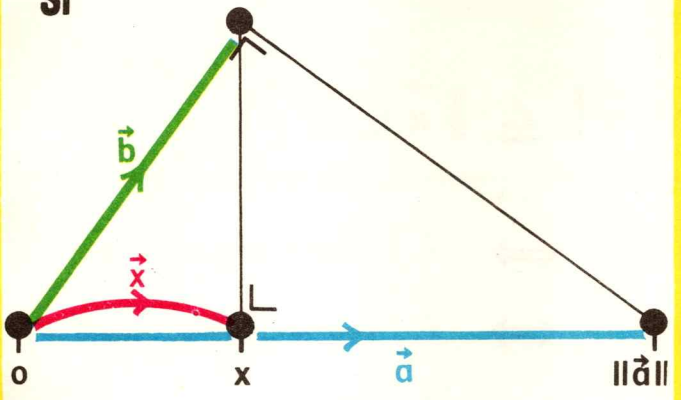

$\vec{y}$
-1
$\cos(\vec{x}, -\vec{y})$
0
$\vec{x}$
$\cos(\vec{x}, \vec{y})$
1
$-\vec{y}$
$\cos(\vec{x}, \vec{y}) \in [-1, +1]$

FIG. 241

PROPOSICION

Si



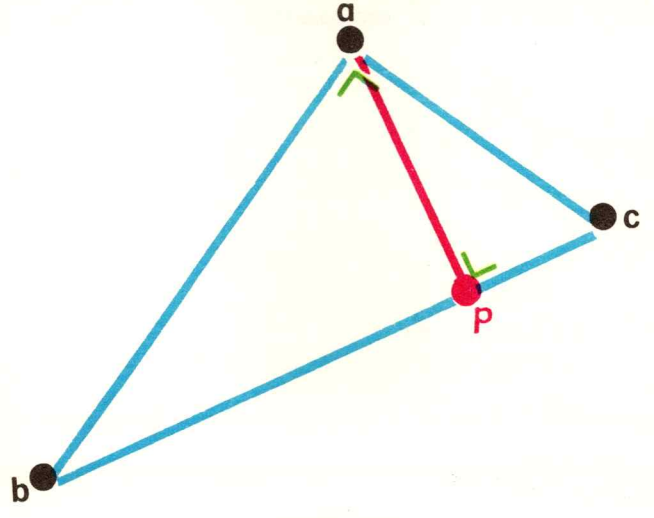
Entonces

$$x = \|\vec{b}\| \cos(\vec{a}, \vec{b})$$

$$= \|\vec{a}\| \cos^2(\vec{a}, \vec{b})$$

FIG. 242

$0 \leqslant \cos^2(\vec{a}, \vec{b}) \leqslant 1$ implica $0 \leqslant x \leqslant \|\vec{a}\|$



$p \in [b\,c]$

FIG. 243

3 – DESIGUALDAD DE CAUCHY-SCHWARZ

TEOREMA $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \Pi_o$

$$|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$$

$\vec{x} \cdot \vec{y} = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \iff \vec{x}, \vec{y}$ paralelos del mismo sentido

$\vec{x} \cdot \vec{y} = -\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \iff \vec{x}, \vec{y}$ paralelos de sentido opuesto

$|\vec{x} \cdot \vec{y}| = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \iff \vec{x}, \vec{y}$ paralelos

CAUCHY-SCHWARZ

El teorema es evidente cuando uno de los vectores $\vec{x}, \vec{y}$ es nulo, pues en ese caso $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0 = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$ y $\vec{x}, \vec{y}$ son paralelos del mismo sentido y paralelos de sentido opuesto.

Supongamos que $\vec{x} \neq \vec{o} \neq \vec{y}$

DEMOSTRACION :

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cos(\vec{x}, \vec{y})$$

$$|\vec{x} \cdot \vec{y}| = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot |\cos(\vec{x}, \vec{y})| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \text{ (puesto que } |\cos(\vec{x}, \vec{y})| \leq 1)$$

$\vec{x} \cdot \vec{y} = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \iff \cos(\vec{x}, \vec{y}) = 1 \overset{\S 2}{\iff} \vec{x}, \vec{y}$ paralelos del mismo sentido.

$\vec{x} \cdot \vec{y} = -\|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \iff \cos(\vec{x}, \vec{y}) = -1 \overset{\S 2}{\iff} \vec{x}, \vec{y}$ paralelos de sentido opuesto.

l.q.q.d.

4 – DESIGUALDAD DE MINKOWSKI

TEOREMA $\quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \Pi_o :$

$$\|\vec{x}+\vec{y}\| \leq \|\vec{x}\|+\|\vec{y}\|$$

$\|\vec{x}+\vec{y}\| = \|\vec{x}\|+\|\vec{y}\|$ **ssi** $\vec{x}$ y $\vec{y}$ son paralelos del mismo sentido

MINKOWSKI

En síntesis :

La norma de la suma es cuanto más igual a la suma de las normas.

DEMOSTRACION :

$$\begin{array}{rcl}
|\vec{x}\cdot\vec{y}| & \leqslant & \|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\| \\
\Downarrow & & \\
\vec{x}\cdot\vec{y} & \leqslant & \|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\| \\
\Updownarrow & & \\
2\cdot\vec{x}\cdot\vec{y} & \leqslant & 2\cdot\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\| \\
\Updownarrow & & \\
\|\vec{x}\|^2+2\vec{x}\,\vec{y}+\|\vec{y}\|^2 & \leqslant & \|\vec{x}\|^2+2\|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|+\|\vec{y}\|^2 \\
\Updownarrow & & \\
\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 & \leqslant & \left(\|\vec{x}\|+\|\vec{y}\|\right)^2 \\
\Updownarrow & & \\
\|\vec{x}+\vec{y}\| & \leqslant & \|\vec{x}\|+\|\vec{y}\|
\end{array}$$

Las equivalencias $\Updownarrow$ siguen siendo verdaderas cuando reemplazamos $\leqslant$ por $=$

Y entonces

$$\|\vec{x}+\vec{y}\| = \|\vec{x}\|+\|\vec{y}\|$$

$$\Updownarrow$$

$$\vec{x}\cdot\vec{y} = \|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|$$

$$\Updownarrow \ \S\,3$$

$\vec{x}, \vec{y}$ paralelos y del mismo sentido $\qquad$ l.q.q.d.

5 – DESIGUALDAD TRIANGULAR

TEOREMA $\forall\, a, b, c \in \Pi$

$$d(a,c) \leq d(a,b) + d(b,c)$$

$$d(a,c) = d(a,b) + d(b,c) \iff b \in [a\,c]$$

DEMOSTRACION :

$$d(a,c) = \|\overrightarrow{ac}\| = \|\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc}\| \leqslant \|\overrightarrow{ab}\| + \|\overrightarrow{bc}\| \leqslant d(a,b) + d(b,c)$$

lo que establece la desigualdad enunciada.

El cálculo que acabamos de efectuar muestra que

$$d(a,c) = d(a,b) + d(b,c)$$

ssi

$$\|\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc}\| = \|\overrightarrow{ab}\| + \|\overrightarrow{bc}\|$$

Ahora bien, en virtud del teorema de Minkowski

$$\|\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc}\| = \|\overrightarrow{ab}\| + \|\overrightarrow{bc}\|$$

ssi

$\overrightarrow{ab}$ y $\overrightarrow{bc}$ son paralelos del mismo sentido.

Y sabemos que

$\overrightarrow{ab}$ y $\overrightarrow{bc}$ son paralelos del mismo sentido

ssi

$$b \in [a\,c]$$

l.q.q.d.

6 – DESIGUALDADES DOBLES

TEOREMA $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \Pi_o \; ; \; \forall a, b \in \Pi$

$$| \; \|\vec{x}\| - \|\vec{y}\| \; | \leqslant \|\vec{x} + \vec{y}\| \leqslant \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$$

$$|d(a,b) - d(b,c)| \leqslant d(a,c) \leqslant d(a,b) + d(b,c)$$

La primera fórmula implica la segunda haciendo $\overrightarrow{ab} = \vec{x}$, $\overrightarrow{bc} = \vec{y}$

La segunda desigualdad de la primera fórmula ha sido ya establecida en el (§ 4).

Falta probar $| \; \|\vec{x}\| - \|\vec{y}\| \; | \leqslant \|\vec{x} + \vec{y}\|$

DEMOSTRACION :

$$\|(\vec{x} + \vec{y}) + (-\vec{y})\| \leqslant \|\vec{x} + \vec{y}\| + \|-\vec{y}\| \qquad \text{(Minkowski)}$$

$$\|\vec{x}\| \leqslant \|\vec{x} + \vec{y}\| + \|\vec{y}\| \qquad (\text{pues } \|-\vec{y}\| = \|\vec{y}\|)$$

$$\|\vec{x}\| - \|\vec{y}\| \leqslant \|\vec{x} + \vec{y}\|$$

La última fórmula es verdadera para **TODA** cupla de vectores.

Es, pues, cierta para la cupla $(\vec{y}, \vec{x})$; de donde

$$\|\vec{y}\| - \|\vec{x}\| \leqslant \|\vec{y} + \vec{x}\|$$

$$-\|\vec{x}\| - \|\vec{y}\| \leqslant \|\vec{x} + \vec{y}\|$$

Uno de los números $\|\vec{x}\| - \|\vec{y}\|$ y $-\left(\|\vec{x}\| - \|\vec{y}\|\right)$ es igual a $| \; \|\vec{x}\| - \|\vec{y}\| \; |$

De donde

$$| \; \|\vec{x}\| - \|\vec{y}\| \; | \leqslant \|\vec{x} + \vec{y}\|$$

l.q.q.d.

7 – CONVEXIDAD DEL CIRCULO

DEFINICION $\forall P \subset \Pi$

P convexo $\iff$ $a, b \in P \implies [ab] \subset P$

M M 1, 11, § 7

TEOREMA

Todo círculo abierto (resp. cerrado) **es convexo.**

DEMOSTRACION :

1°) Llamemos o al centro del círculo abierto Δ de radio r

$$\Delta = \Delta(o, r)$$

Tenemos $a, b \in \Delta$ y $x \in [ab]$

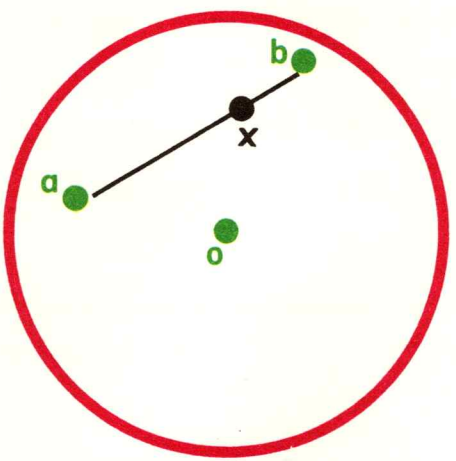
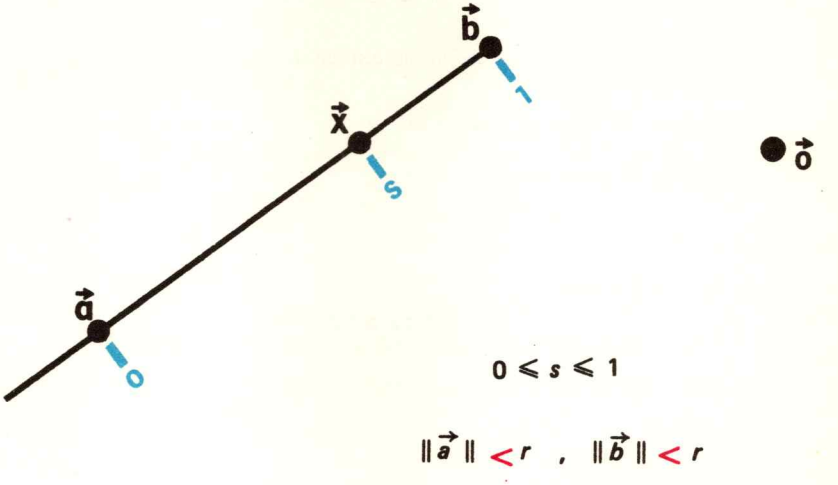


FIG. 244

Debemos probar que $x \in \Delta$

Hagamos $\vec{a} = \overrightarrow{oa}$, $\vec{b} = \overrightarrow{ob}$, $\vec{x} = \overrightarrow{ox}$



$0 \leqslant s \leqslant 1$

$\|\vec{a}\| < r$, $\|\vec{b}\| < r$

FIG. 245

$$\vec{x} = \vec{a} + s(\vec{b} - \vec{a}) \qquad \text{con } 0 \leqslant s \leqslant 1$$

$$\vec{x} = (1-s)\vec{a} + s\vec{b} \qquad \text{(observemos que } 0 \leqslant 1-s \leqslant 1\text{)}$$

$$\|\vec{x}\| = \|(1-s)\vec{a} + s\vec{b}\|$$

$$\leqslant \|(1-s)\vec{a}\| + \|s\vec{b}\| \qquad \text{(Minkowski)}$$

$$= (1-s)\|\vec{a}\| + s\|\vec{b}\|$$

$$< (1-s)r + sr \qquad \left(\text{pues } a, b \in \Delta(o, r)\right)$$

$$= r$$

Luego $\|\vec{x}\| < r$ y $x \in \Delta$

2°) En el caso del círculo cerrado

$$\overline{\Delta} = \overline{\Delta}\ (o\ ,\ r)$$

la demostración precedente se puede aplicar íntegramente

reemplazando en ella Δ por $\overline{\Delta}$ y $<$ por $\leqslant$

l.q.q.d.

EJERCICIO

He aquí $c \in \Pi$ y $r \in \mathbf{R}_o^+$

Toda parte P de Π tal que $\Delta\ (c\ ,\ r) \subset P \subset \overline{\Delta}\ (c\ ,\ r)$ es convexa

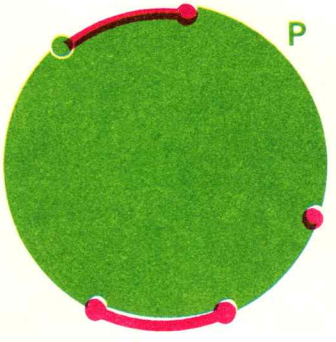


FIG. 246

8 – CIRCULOS ABIERTOS

TEOREMA

Todo punto de un círculo abierto no vacío
es centro de un círculo abierto incluido no vacío.

He aquí el círculo abierto no vacío $\Delta = \Delta(c, r)$, con $r \in \mathbf{R}_o^+$ y $a \in \Delta$

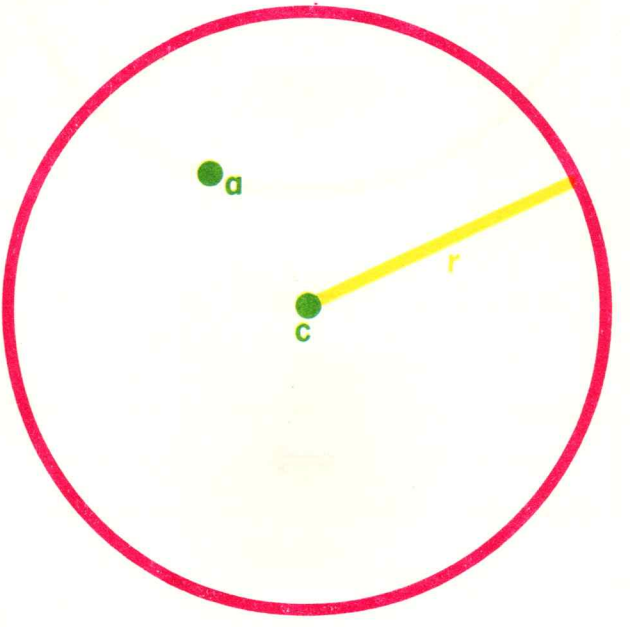


FIG. 247

Luego $d(a, c) < r$

$r - d(a, c) > 0$

Elijamos s tal que $0 < s \leqslant r - d(a, c)$

Probemos que $\Delta(a, s) \subset \Delta(c, r)$

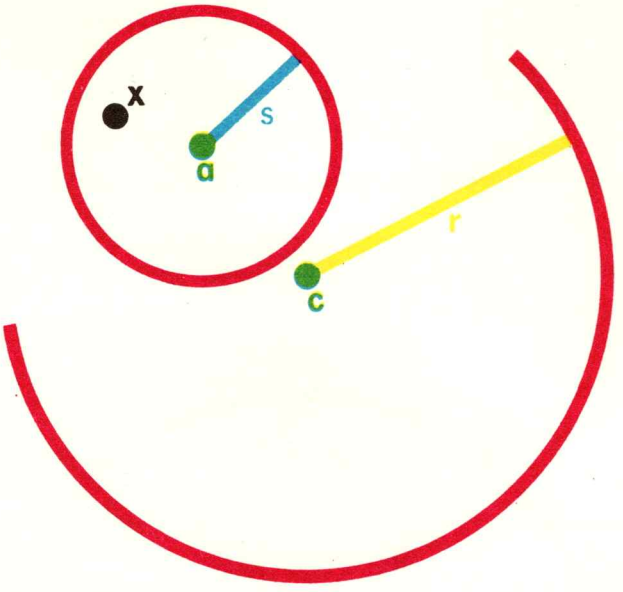


FIG. 248

Debemos establecer que

$$x \in \Delta(a, s) \implies x \in \Delta(c, r)$$

Es decir

$$d(a, x) < s \implies d(c, x) < r$$

DEMOSTRACION :

$d(c, x)$

$\leqslant d(c, a) + d(a, x)$ (Desigualdad triangular)

$< d(c, a) + s$ (pues $d(a, x) < s$)

$= r$ (pues $s = r - d(c, a)$)

Por tanto $d(c, x) < r$

l.q.q.d.

9 – EJERCICIOS

DEFINICION

El conjunto $P \subset \Pi$ *es* **abierto**

ssi

todo punto de P *es centro de un círculo abierto no vacío incluido en* P

1. **Si** los conjuntos A y B son abiertos
   Entonces $A \cap B$ es abierto
   $A \cup B$ es abierto.

2. Los conjuntos Π y ϕ son abiertos.

3. Todo círculo abierto es un abierto.

4. La intersección de dos círculos abiertos es un conjunto convexo abierto.

5. La intersección y la reunión de todo conjunto finito de abiertos es un abierto.

6. Los conjuntos unitarios no son conjuntos abiertos.

7. Las partes finitas de Π no son abiertas.

8. Las rectas de Π no son conjuntos abiertos.

9. Todo semiplano abierto es un conjunto abierto.

10. Los semiplanos cerrados no son abiertos.

11. Los círculos cerrados no son abiertos.

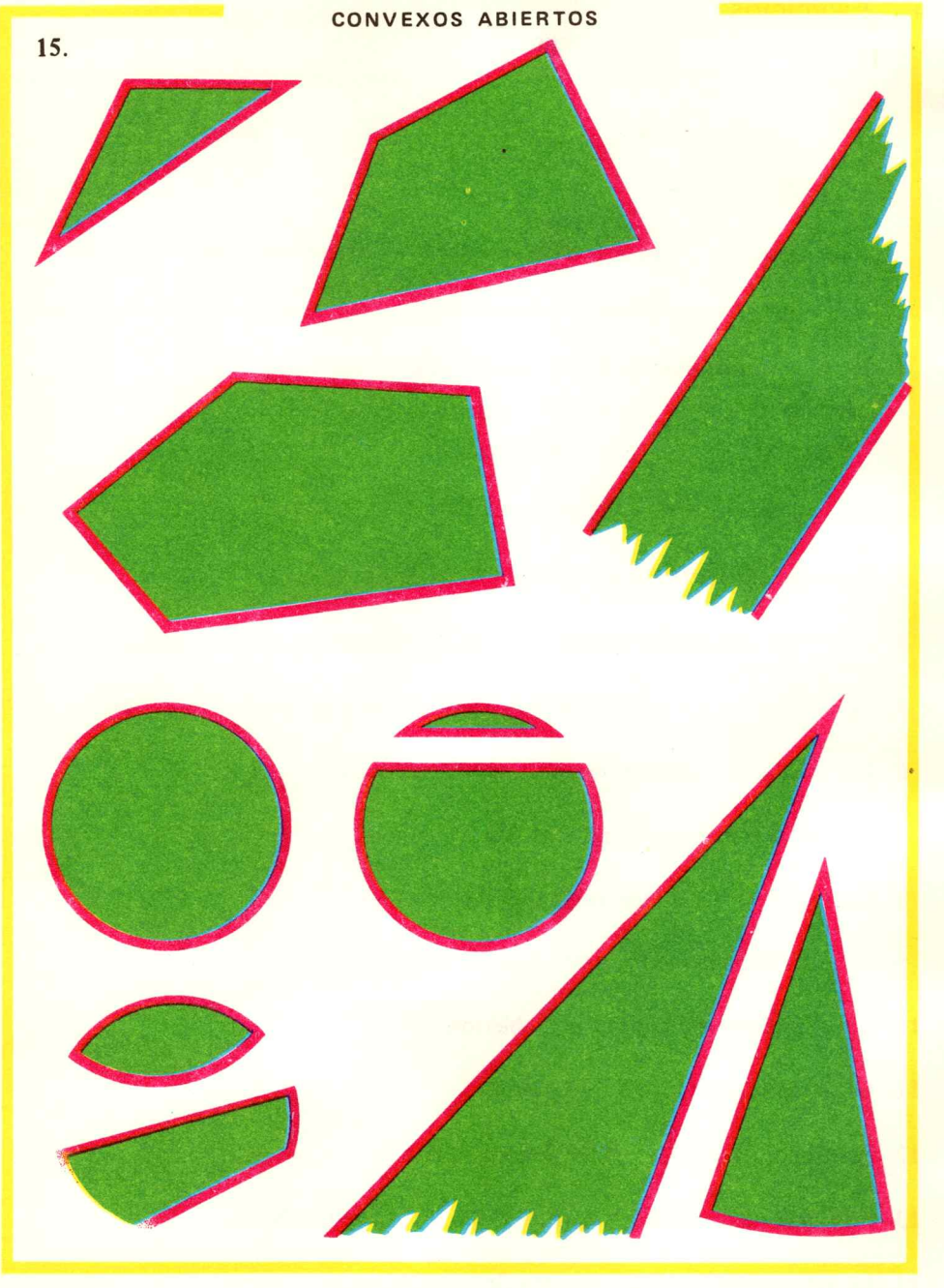
12. Para todo $p \in \Pi$: $\Pi \{P\}$ es un abierto.

13. Para toda parte finita $P \subset \Pi$: $\Pi \setminus p$ es un abierto.

14. La intersección de todo conjunto finito de semiplanos abiertos es un convexo abierto.

CONVEXOS ABIERTOS

15.

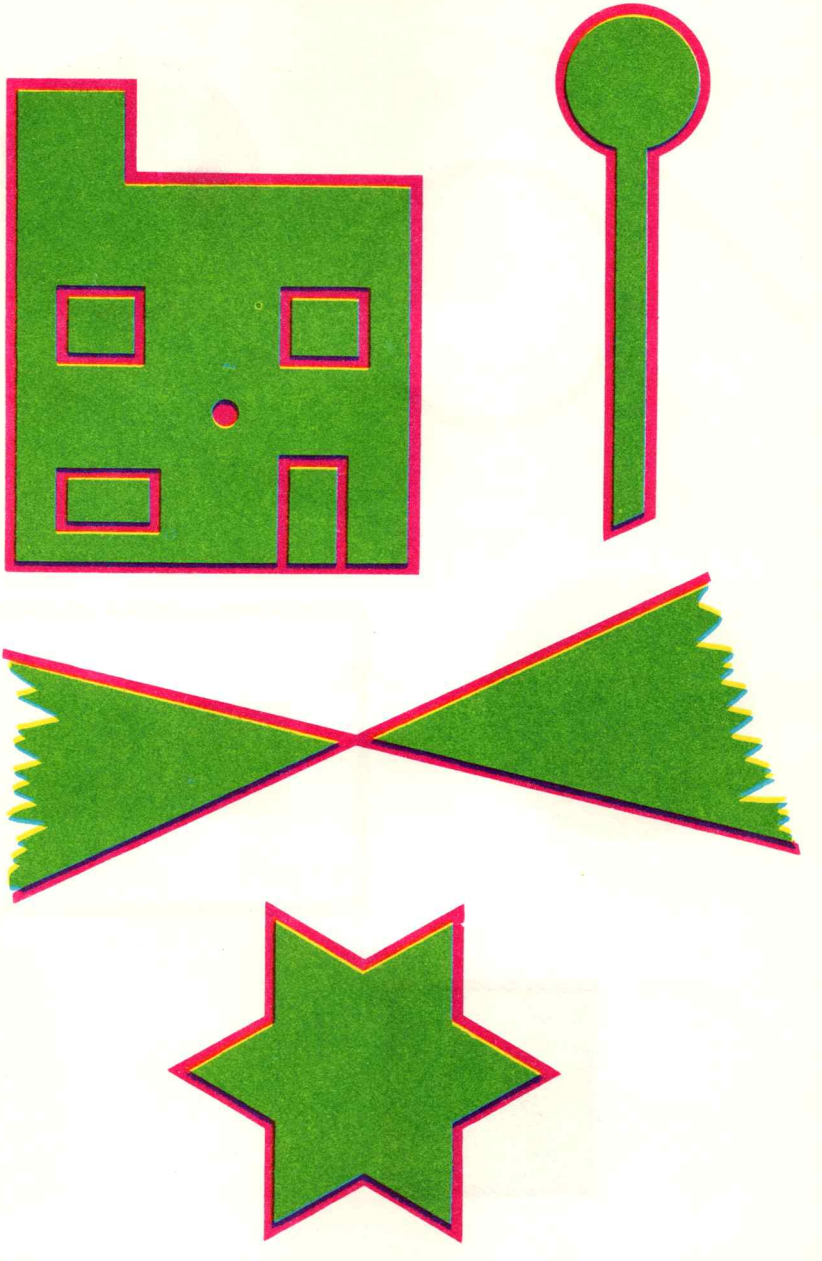


¡Observa, explica, justifica!

FIG. 249

CONJUNTOS ABIERTOS

16.

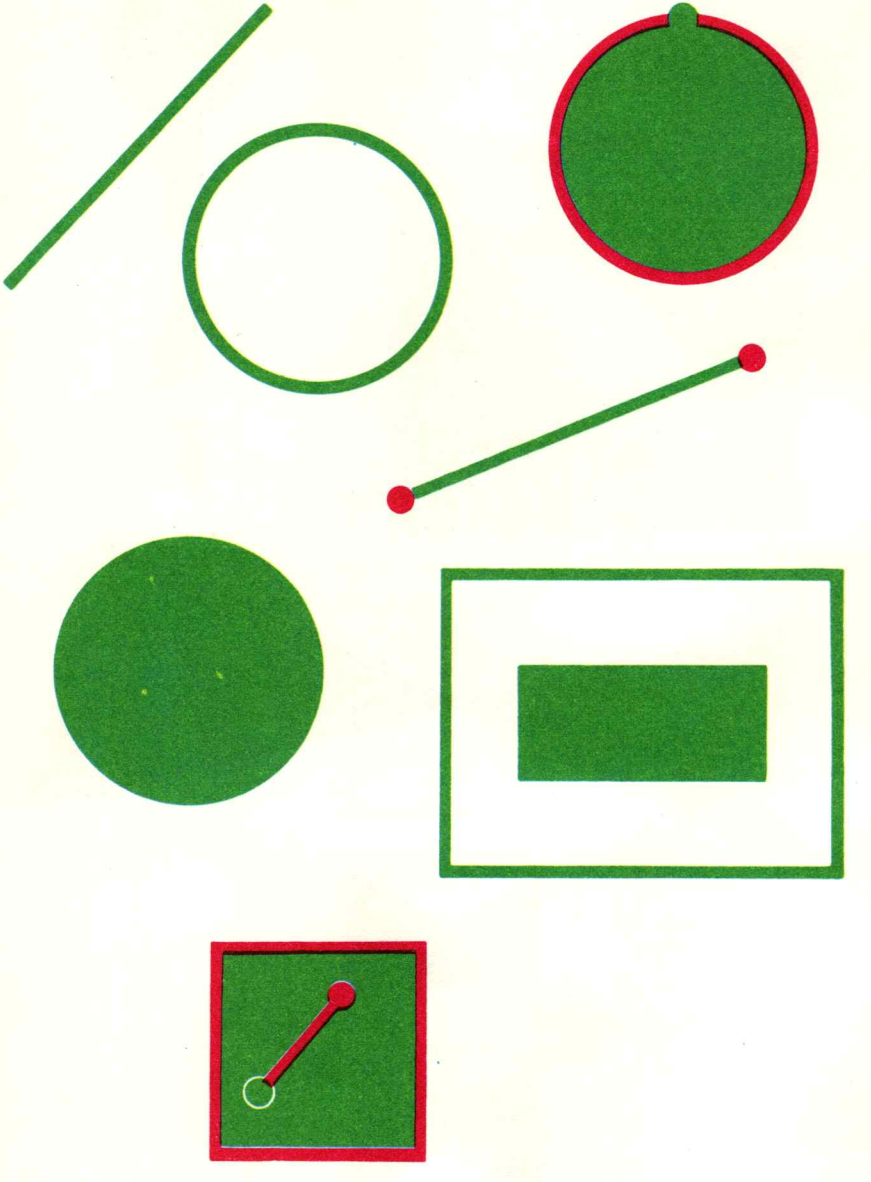


¡Observa, explica, justifica!

FIG. 250

CONJUNTOS NO ABIERTOS

17.



¡Observa, explica, justifica!

FIG. 251

18.

FIG. 252

(Extraído del gran Larousse enciclopédico)

AGUSTIN CAUCHY
(1789–1857)

París 1789

14 de julio
Toma de la Bastilla

21 de agosto
Nacimiento
de Agustín CAUCHY

Desde su nacimiento los sobresaltos de la política jalonaron la vida de Agustín CAUCHY.

Con el fin de escapar de los peligros de un París dominado por la Revolución y por el Terror, su padre trasladó a su familia a la aldea de Arcueil. Agustín CAUCHY permanecerá allí sus once primeros años al lado de sus padres, fervientes católicos, y en el aislamiento exaltado de las minorías perseguidas.

Las vejaciones de la Revolución hacia la fe de su familia lo tornaron un católico practicante y un realista de derecho divino sumamente convencido.

Toda su vida manifestará con orgullo sus convicciones y su posición y su proceder se acomodará con rigor a dichas convicciones, aunque ello contribuya a que su carrera académica se desarrolle en una vulgar medianía en esa época tan agitada políticamente.

1789	Luis XVI	– 0	Nacimiento de Agustín CAUCHY.
	Revolución francesa		
1796		– 7	**Arcueil.** Instrucción primaria dada por su propio padre. Iniciación latina y francesa. Sus cualidades matemáticas son puestas de manifiesto por LAPLACE.
		–11	
	Napoleón I		**París.** Estudios secundarios. Estudios de ingeniero. LAGRANGE reconoce sus cualidades matemáticas.
		–21	
			Cherbourg. Napoleón lo destaca como ingeniero militar. Su primera memoria sobre la *Teoría de las Permutaciones.*
		–24	**París.**
	Luis XVIII		
1815	Los cien días	–26	Resuelve un famoso problema propuesto por FERMAT.
		–27	Es elegido académico. Acepta la sede vacante por el destierro de MONGE por razones políticas.
	Carlos X	–29	Contrae matrimonio y tiene dos hijas.
		–32	Curso de Análisis en la Escuela Politécnica: "El Análisis con el mismo rigor que en geometría".
1830		–41	
			Destierro voluntario a Suiza, Turín, Praga donde se convierte en preceptor de un hijo de Carlos X.
	Luis Felipe		
		–50	Vuelve a París. Rehusa prestar juramento.
		–58	Los números complejos sin metafísica.
1848			
	República		Regulariza su situación: pero ¡no se aviene a prestar juramento!
1852		–63	
			¡Se restablece la dispensa de prestar juramento!
1857	Napoleón III	–68	Muerte de Agustín CAUCHY.

El régimen de subalimentación a que se ve obligado CAUCHY durante su infancia por causa de la Revolución, hará que su complexión sea débil y que permanezca subdesarrollado hasta cumplir los veinte años. Ello le obligará, además, a tener que cuidar su salud durante toda su vida.

Pero, a pesar de su débil constitución, su destierro, las interminables discusiones con sus colegas y sus conflictos sin fin con las autoridades que se suceden sin cesar, Agustín CAUCHY produjo enorme caudal científico: más de setecientas ochenta y nueve memorias editadas en veinticinco gruesos volúmenes (en cuarto).

En política, Agustín CAUCHY fue conservador empedernido. Carlos X constituía su ideal político, y siempre, contra viento y marea, defendió la monarquía de derecho divino, sin aceptar jamás las ideas nuevas.

En matemática, en cambio, CAUCHY fue gran innovador.

A CAUCHY corresponde el mérito inmenso de evidenciar la noción fundamental de **grupo**.

En el período que pasa en Cherbourg, consagra una memoria a la *Teoría de las Permutaciones*, que sería el origen de los grupos a los que CAUCHY consagrará, asimismo, numerosas memorias.

Evaristo GALOIS (1830) revelaría en breve el papel de los grupos en la teoría de las ecuaciones lineales. Su utilización sistemática por KLEIN debía cambiar la visión del mundo geométrico (1870).

(Programa de Erlangen)

Los grupos han adquirido desde entonces una importancia más fundamental aún como elemento motor de la construcción del edificio matemático.

Desde los primeros días en Cherbourg, Agustín CAUCHY se interesó en los problemas acerca de la enseñanza de la matemática y allí adquirió la reputación de un gran profesor de explicaciones claras y precisas.

A fuer de buen pedagogo, comprendió de inmediato la necesidad esencial del rigor matemático en la enseñanza.

El matemático consumado puede, eventualmente, prescindir de un rigor formalmente expresado. Su imaginación, su experiencia y su sentido de los matices le permiten eventualmente hablar de una manera elíptica. No sucede lo mismo a los principiantes.

El cálculo diferencial, debido a NEWTON y a LEIBNITZ, se hallaba en ese momento imbuido de ideas metafísicas y nebulosas.

El *Curso de Análisis* de CAUCHY (1821), cuando dictaba sus lecciones en la Escuela Politécnica, fue una contribución importante para despojar el análisis de sus ornamentaciones filosóficas y estudiarlo "con idéntico rigor que en geometría".

Sabemos que el primer tratado riguroso de la geometría métrica plana se debe a HILBERT en 1900.

A menudo nos hemos preguntado por qué GAUSS, doce años mayor que CAUCHY, no le tomó la delantera y reconstruyó el análisis según las ideas que realmente compartía. Sin duda CAUCHY sólo poseyó la rapidez de publicación indispensable en semejantes circunstancias.

* * *

La desigualdad de CAUCHY citada en esta obra se ha entresacado de las *Obras completas de Agustín Cauchy*, 2a. serie, tomo III, Teorema XVI, pág. 273, Gauthier – París, 1897.

Los hombres pasan, pero sus obras permanecen

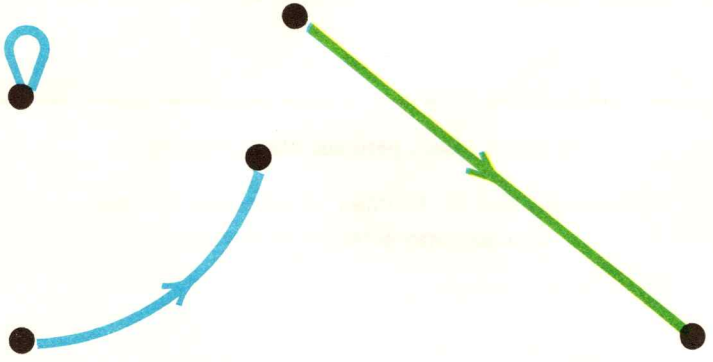
últimas palabras de CAUCHY al arzobispo de París,
algunas horas antes de su muerte.

14

Cálculo en el grupo de ángulos

1 – ANGULO DE UNA ROTACION

– Tenemos la rotación r y la traslación t



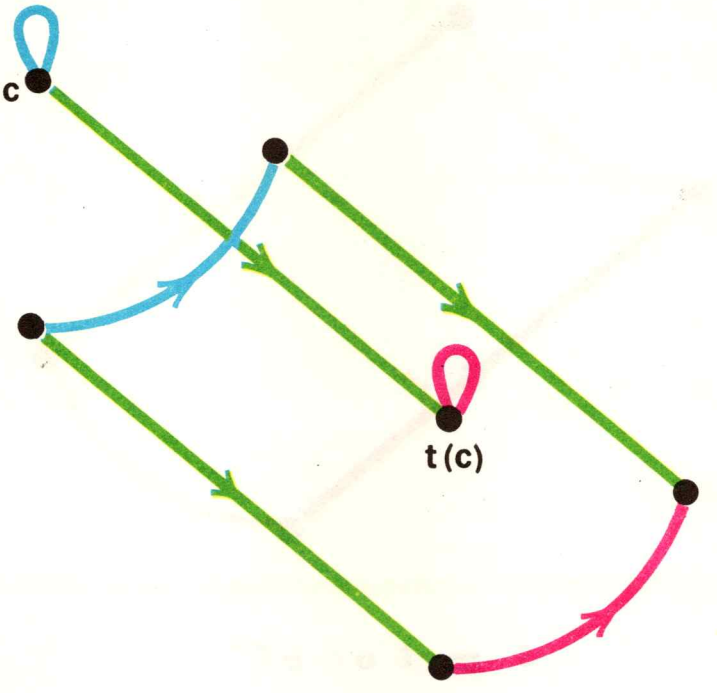
LA ROTACION r LA TRASLACION t

FIG. 253

– ¿A qué se llamará, en forma natural

transformada de r por t?

DEFINICION 1



ROTACION *r* TRASLACION *t*

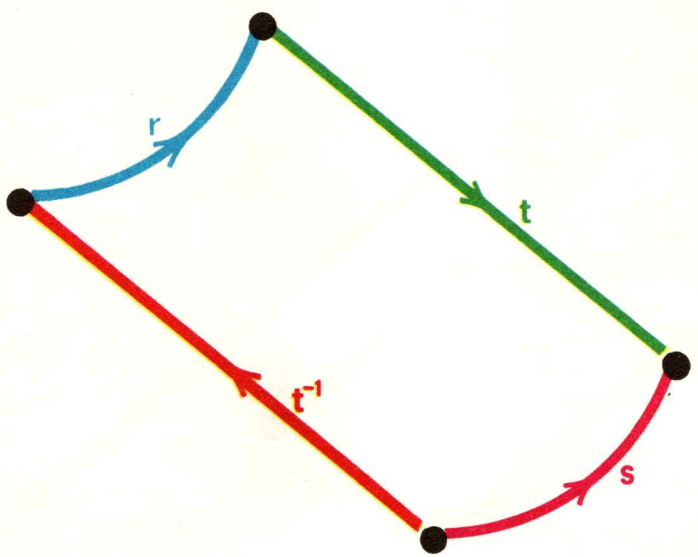
s : transformada de *r* por *t*

$$= \left\{ \left(t(x) \ , \ t(y) \right) \ \blacksquare \ (x \ , \ y) \in r \right\}$$

es la transformada de la rotación r *por la traslación* t

FIG. 254

Más claramente :



$$s = t \circ r \circ t^{-1}$$

TRANSFORMADA DE LA ROTACION r POR LA TRASLACION t

FIG. 255

De aquí una nueva definición :

DEFINICION 1

$$s = t \circ r \circ t^{-1}$$

es la transformada de la rotación r *por la traslación* t

t , r , t^{-1} son desplazamientos.

$s = t \circ r \circ t^{-1}$ es un desplazamiento.

$$s = \left\{ \left(t(x) , t(y) \right) \mid (x , y) \in r \right\}$$

$t(c)$ es un punto fijo de s

$s = t \circ r \circ t^{-1}$ es una rotación de centro $t(c)$

Acabamos de probar la

PROPOSICION 1

La transformada de una rotación de centro c por la traslación t

es una rotación de centro t (c)

Que expresaremos brevemente

la transformada de una rotación por una traslación

es una trasladada de esta rotación.

UNA ROTACION . . .

Y ALGUNA DE SUS TRASLADADAS

FIG. 256

Designa por r una rotación de la figura 256.

Designa por s una rotación de la figura 256.

s es la transformada de r por la traslación
que aplica el centro de r sobre el de s

r es la transformada de s por la traslación
que aplica el centro de s sobre el de r

r es la transformada de r por la traslación 1_Π

Demostremos detalladamente la

PROPOSICION 2

... es una trasladada de ...

es una equivalencia definida en $\mathfrak{R}$

DEMOSTRACION :

1° Reflexividad

Toda rotación r es la transformada de r por la traslación 1_Π

2° Transitividad

He aquí las rotaciones r , r_1 , r_2 tales que

r_1 es la transformada de r por la traslación t_1

r_2 es la transformada de r_1 por la traslación t_2

Entonces

$$r_1 = \left\{ \left(t_1 \, x , t_1 \, y\right) \quad \blacksquare \quad (x , y) \in r \right\}$$

$$r_2 = \left\{ \left(t_2 \, (t_1 \, x) , t_2 \, (t_1 \, y)\right) \quad \blacksquare \quad (x , y) \in r \right\}$$

$$= \left\{ \left((t_2 \circ t_1) \, x , (t_2 \circ t_1) \, y\right) \quad \blacksquare \quad (x , y) \in r \right\}$$

r_2 es la transformada de r por la traslación $t_2 \circ t_1$

3° Simetría

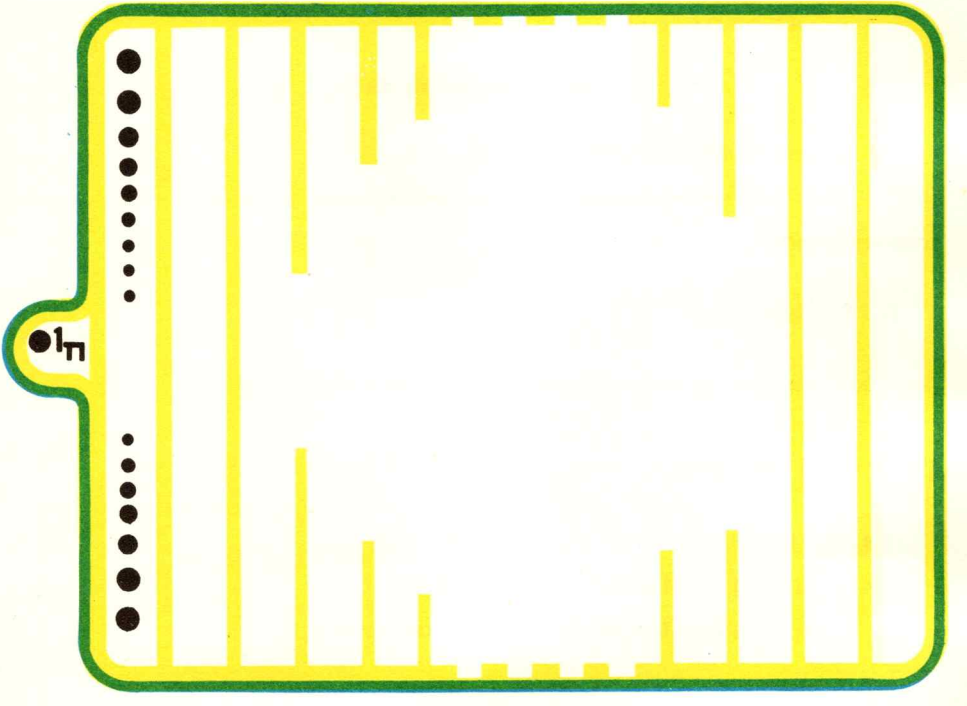
Si r, s designan rotaciones y t una traslación

Entonces s es la transformada de r por t

ssi

r es la transformada de s por t^{-1}

l.q.q.d.



$\mathcal{R}$ Y SUS CLASES DE EQUIVALENCIA POR LA RELACION

... es trasladada de ...

FIG. 257

Las rotaciones de una misma clase tienen un carácter común que denominamos **ángulo.** De una manera precisa :

DEFINICION 2 $\forall r, s \in \mathcal{R}$

s es una trasladada de r

ssi

r y s tienen el mismo ángulo

En símbolos

DEFINICION 2 $\forall r, s \in \mathcal{R}$:

$\hat{r} = \hat{s} \iff$ *s es una trasladada de r*

Y resumiendo :

ANGULO = **¡ROTACION que ha perdido su CENTRO!**

2 — ANGULO DE UNA CUPLA DE SEMIRRECTAS

— He aquí semirrectas cerradas $\overline{A}_o$, $\overline{B}_o$ de origen o

Existe una y sólo una rotación que aplica $\overline{A}_o$ sobre $\overline{B}_o$

Se la anota $\text{rot}\,(\overline{A}_o\ ,\ \overline{B}_o\ )$

DEFINICION 1

El ángulo de $\text{rot}\,(\overline{A}_o\ ,\ \overline{B}_o)$ *se denomina asimismo* **ángulo de** $(\overline{A}_o\ ,\ \overline{B}_o)$ y se anota

$$\overset{\frown}{\overline{A}_o\ \overline{B}_o}$$

$$\overset{\frown}{\overline{A}_o\ \overline{B}_o} = \text{rot}\,\overset{\frown}{(\overline{A}_o\ \overline{B}_o)}$$

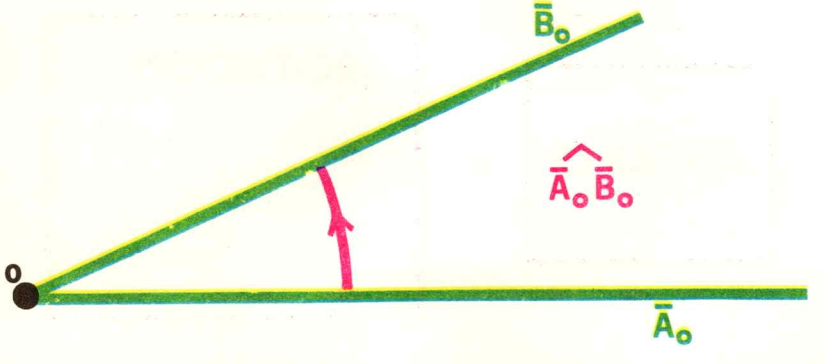


FIG. 258

¿Cuál es la transformada de rot $(\bar{A}_o , \bar{B}_o)$ *por la traslación t*

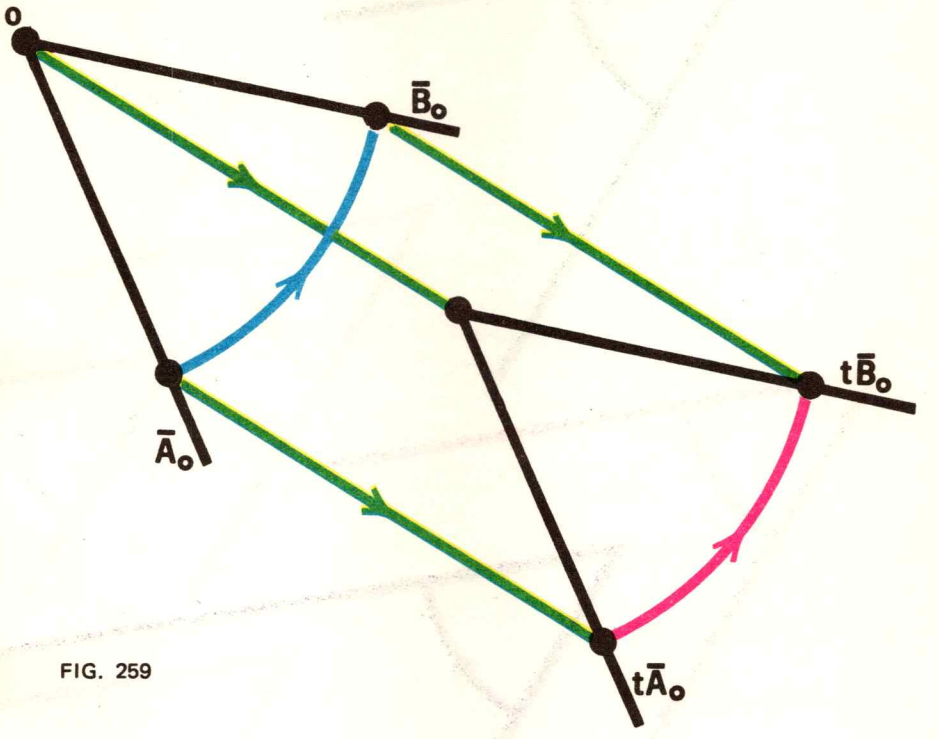


FIG. 259

r = rot $(\bar{A}_o , \bar{B}_o)$

t : traslación

s : transformada de r por t

s = rot $(t\,\bar{A}_o , t\,\bar{B}_o)$

$\forall\, \bar{A}_o , \bar{B}_o \in \bar{\mathfrak{D}}_o$ $\qquad$ $\forall\, t \in \mathfrak{C}$

$$t \circ \text{rot}\,(\bar{A}_o , \bar{B}_o) \circ t^{-1} = \text{rot}\,(t\,\bar{A}_o , t\,\bar{B}_o)$$

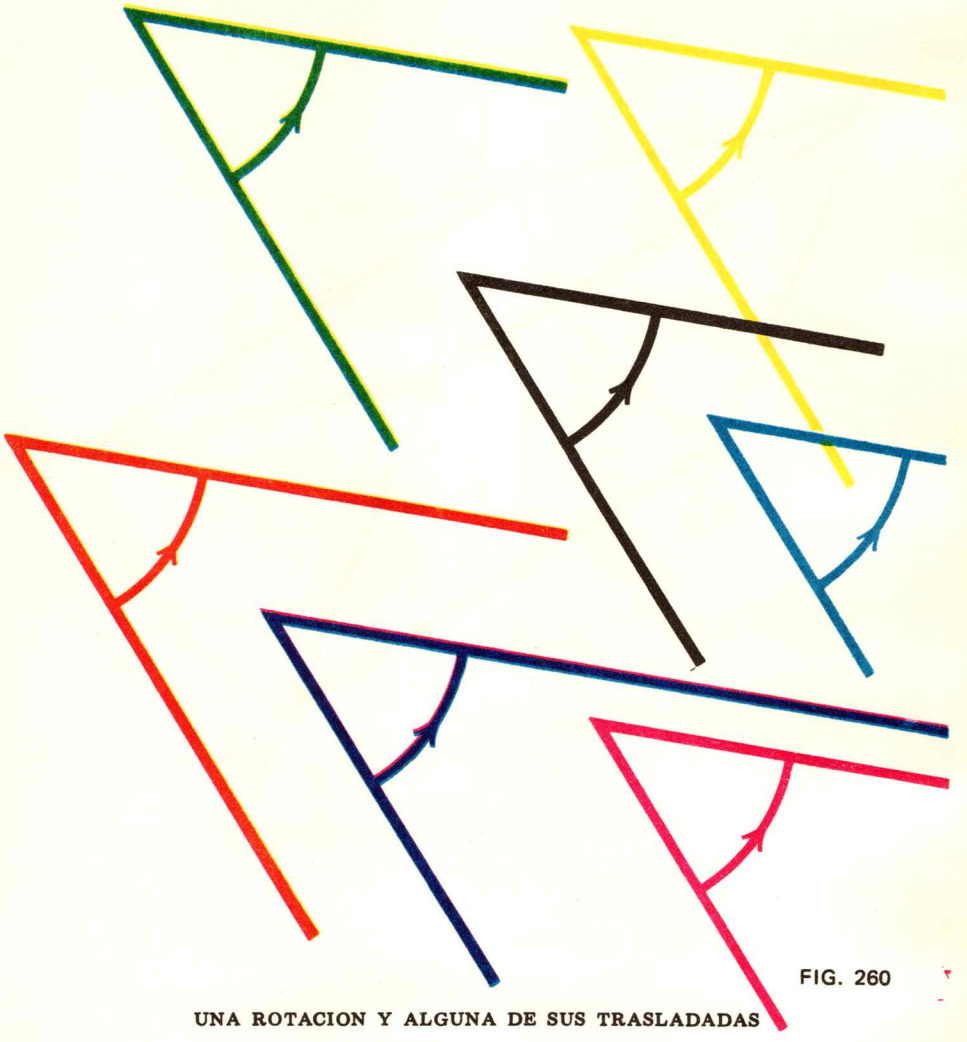


FIG. 260

UNA ROTACION Y ALGUNA DE SUS TRASLADADAS

Todas estas rotaciones tienen el mismo ángulo.

$$\forall\, A_o, B_o \in \mathfrak{D}_o \qquad \forall\, t \in \mathfrak{T}$$

$$\widehat{t\overline{A}_o\, t\overline{B}_o} = \widehat{\overline{A}_o\, \overline{B}_o}$$

— He aquí las semirrectas cerradas $\overline{A}$, $\overline{B}$

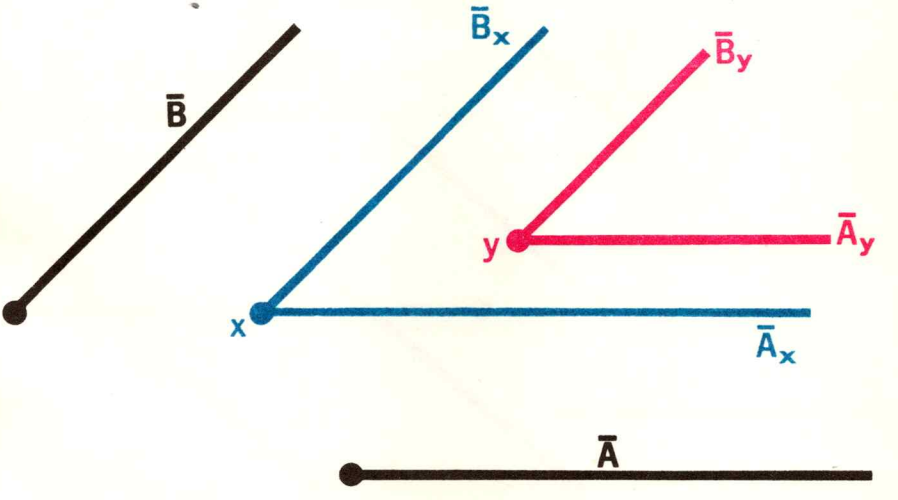
Para todo $x \in \Pi$, anotamos $\overline{A}_x$, $\overline{B}_x$ las trasladadas de $\overline{A}$ y $\overline{B}$ de origen x

La cupla $(\overline{A}, \overline{B})$ define

Las cuplas $(\overline{A}_x , \overline{B}_x) , (\overline{A}_y , \overline{B}_y) , \ldots$

y el ángulo $\widehat{\overline{A}_x \overline{B}_x} = \widehat{\overline{A}_y \overline{B}_y} = \ldots$

DEFINICION 2



$$\widehat{\overline{A}\,\overline{B}} = \widehat{\overline{A}_x \overline{B}_x} = \widehat{\overline{A}_y \overline{B}_y} = \ldots$$

FIG. 261

Si f, g designan traslaciones

Entonces $\widehat{\overline{A}\,\overline{B}} = f\widehat{\overline{A}\,g\,\overline{B}}$

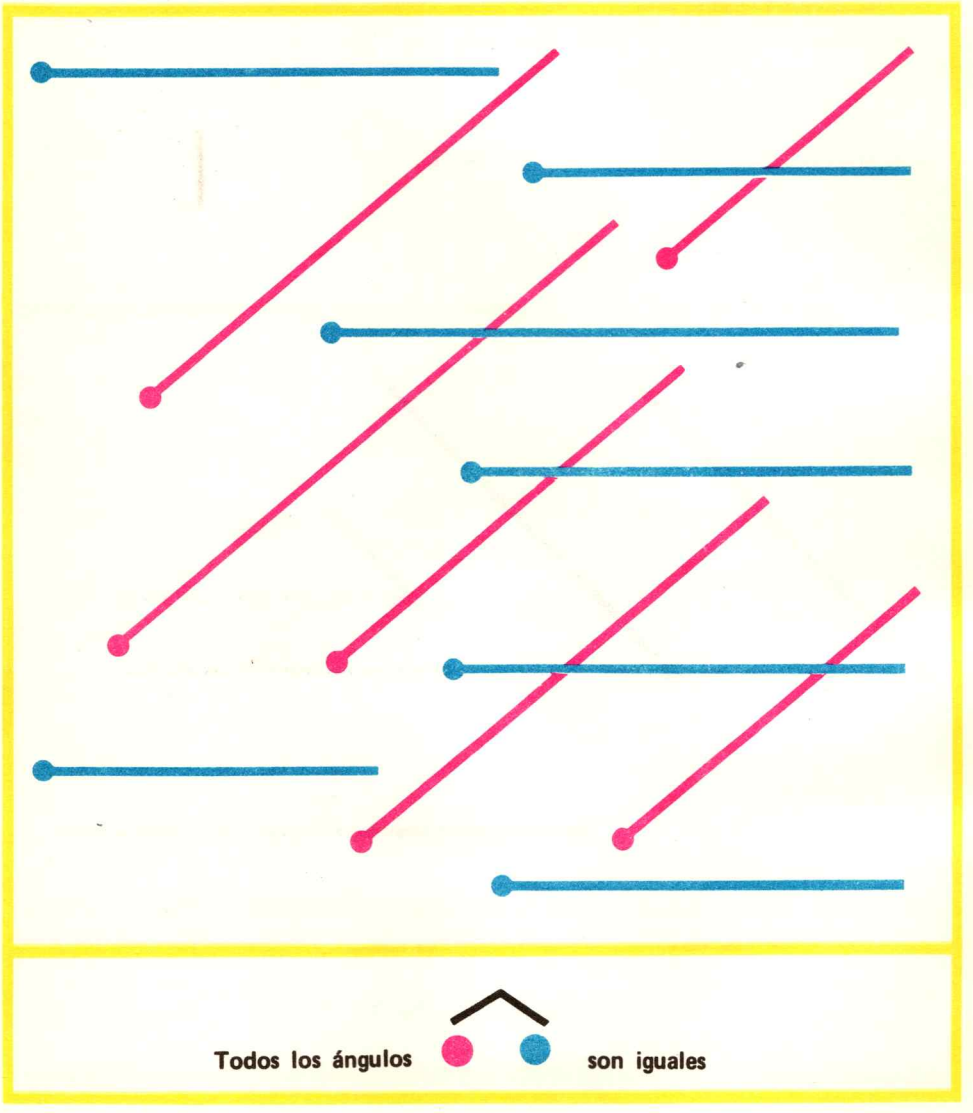
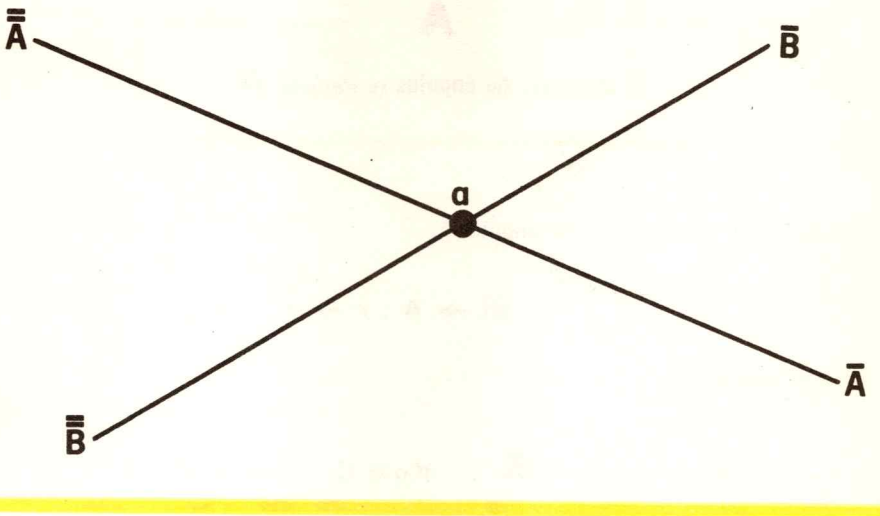


FIG. 262

PROPOSICION



$$\widehat{\overline{A}\,\overline{B}} = \widehat{\overline{\overline{A}}\,\overline{\overline{B}}}$$

FIG. 263

DEMOSTRACION :

$$\widehat{\overline{A}\,\overline{B}} = \overset{\frown}{\text{rot}\,\overline{A}\,\overline{B}} = \overset{\frown}{\text{rot}\,\overline{\overline{A}}\,\overline{\overline{B}}} = \widehat{\overline{\overline{A}}\,\overline{\overline{B}}}$$

l.q.q.d.

3 — CONJUNTO DE ANGULOS

A

El conjunto de ángulos *se designa* **A**

En virtud de la definición de ángulos

$$f : \mathcal{R} \to A : r \to \hat{r}$$

es una suryección.

$\forall r \in \mathcal{R}$; $\forall o \in \Pi$

existe una y sólo una rotación

r_o de centro o y de ángulo r

De ello resulta

$\forall o \in \Pi$

$$\mathcal{R}_o \to A : r \to \hat{r}$$

es una **BIYECCION**

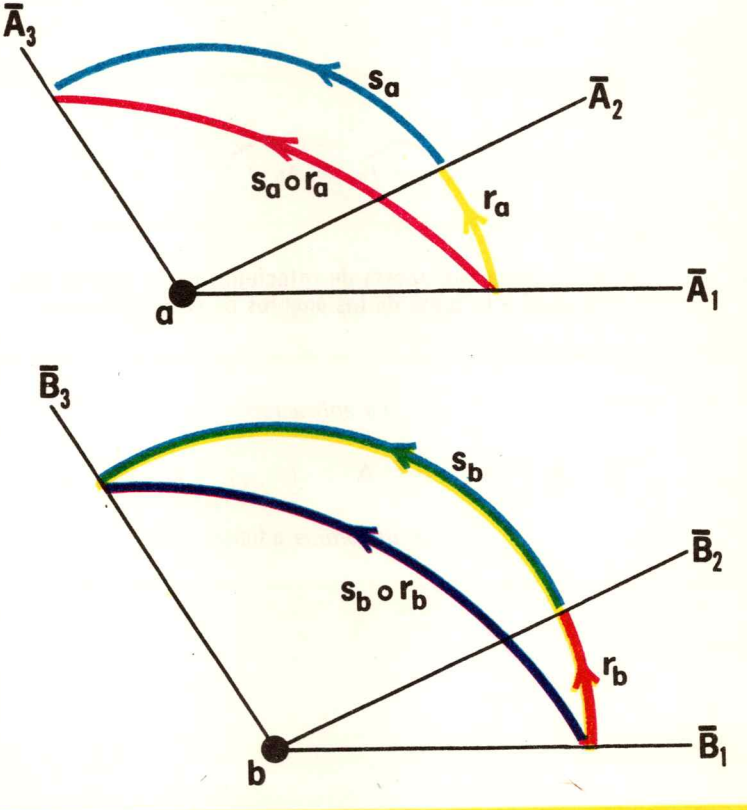
4 – ADICION DE ANGULOS

He aquí una cupla de ángulos

$$\hat{r}_a = \hat{r}_b \qquad \hat{s}_a = \hat{s}_b$$

donde $r_a , s_a \in \mathcal{R}_a \; ; \; r_b , s_b \in \mathcal{R}_b$

¿Qué podremos decir de los ángulos $\widehat{s_a \circ r_a}$ y $\widehat{s_b \circ s_b}$?



$$\widehat{s_a \circ r_a} = \widehat{s_b \circ r_b}$$

FIG. 264

El ángulo

$$\widehat{s_a \circ r_a} = \widehat{s_b \circ r_b}$$

queda perfectamente definido por la cupla de ángulos

$$(\hat{r}_a , \hat{s}_a) = (\hat{r}_b , \hat{s}_b)$$

Se la denomina la suma de los ángulos

$$\hat{r}_a = \hat{r}_b \quad \text{y} \quad \hat{s}_a = \hat{s}_b$$

DEFINICION

$$\hat{s}_a + \hat{r}_a = \widehat{s_a \circ r_a} = \widehat{s_b \circ r_b} = \hat{s}_b + \hat{r}_b$$

El ángulo de la compuesta de rotaciones de un mismo centro es igual a la suma de los ángulos de estas rotaciones.

La aplicación

$$A \times A \to A : (x , y) \to x + y$$

se denomina **adición.**

5 – GRUPO DE ANGULOS

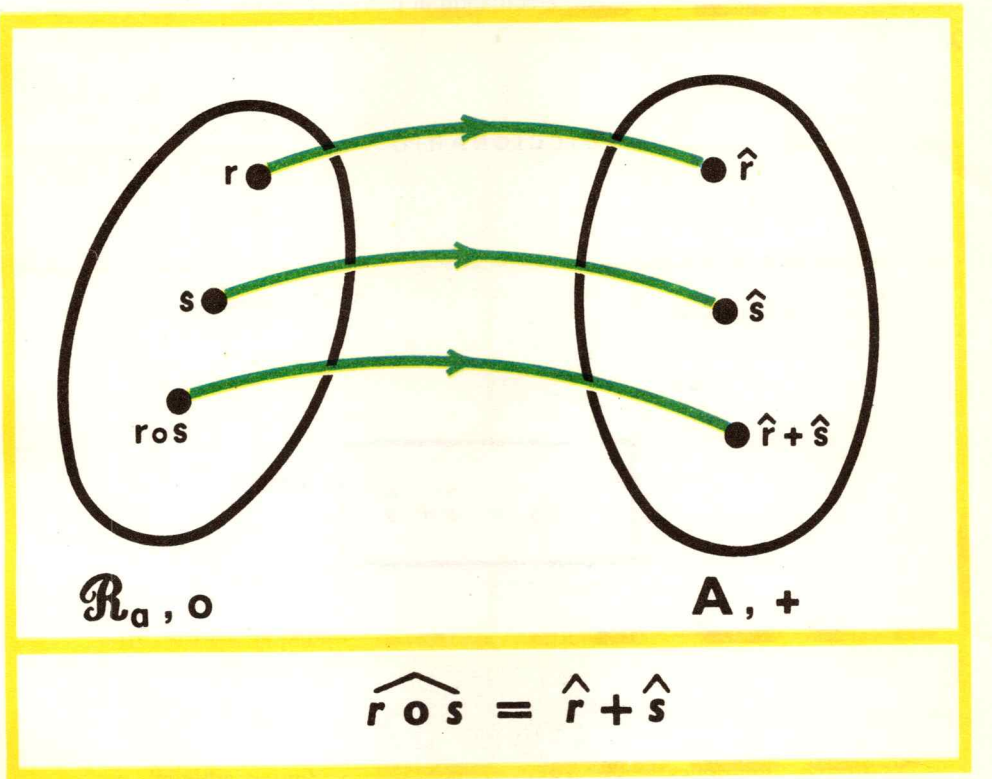


FIG. 265

La biyección $\mathcal{R}_a \rightarrow A : r \rightarrow \hat{r}$

es un **ISOMORFISMO** de $\mathcal{R}_a$, o *sobre* A , +

O expresado de otro modo

El grupo conmutativo $\mathcal{R}_a$, o es un modelo perfecto de A , +

Luego

A, + es un GRUPO CONMUTATIVO

El isomorfismo $\mathcal{R}_a$, o $\rightarrow$ A , + nos permite construir un diccionario efectuando el pasaje del grupo $\mathcal{R}_a$, o al grupo A , +

DICCIONARIO

$\mathcal{R}_a$, o	A , +
composición	adición
$r , s , r \circ s$	$\hat{r} , \hat{s} , \hat{r} + \hat{s}$
$\widehat{r \circ s} = \hat{r} + \hat{s}$	
elemento neutro 1_Π	elemento neutro $\hat{1}_\Pi$
$1_\Pi = 1$	$\hat{1}_\Pi = o$
(grupo "multiplicativo")	(grupo aditivo)
transformación idéntica	ángulo nulo
inverso	opuesto
r , r^{-1}	$\hat{r} , \quad -\hat{r}$
$\widehat{r^{-1}} = -\hat{r}$	

15

Cálculo en el grupo de ángulos

1 – CALCULO EN EL GRUPO DE ANGULOS

He aquí las semirrectas cerradas $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$

$$\widehat{\overline{A}\,\overline{B}} + \widehat{\overline{B}\,\overline{C}} = \ ?$$

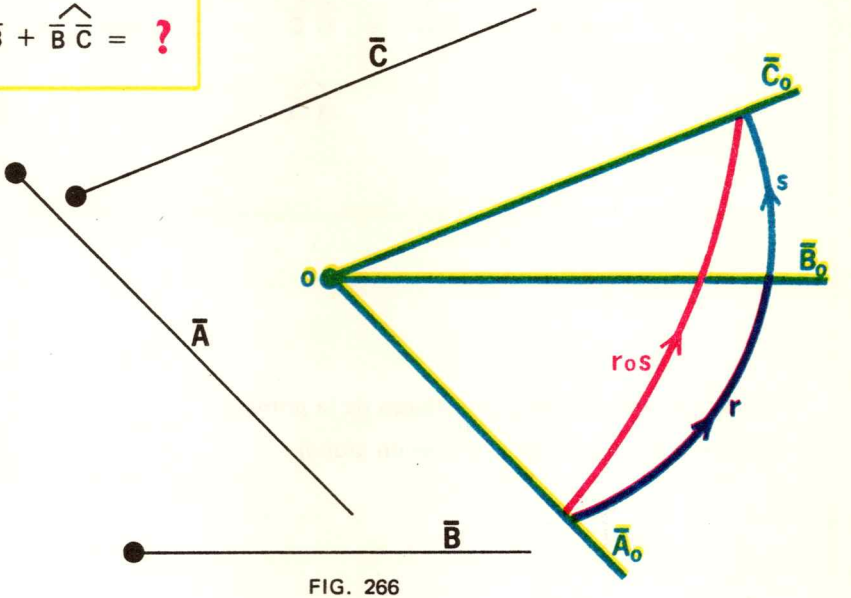


FIG. 266

La rotación r aplica $\overline{A}_o$ sobre $\overline{B}_o$
La rotación s aplica $\overline{B}_o$ sobre $\overline{C}_o$
La rotación $s \circ r = r \circ s$ aplica $\overline{A}_o$ sobre $\overline{C}_o$

$$\widehat{\overline{A}\,\overline{B}} + \widehat{\overline{B}\,\overline{C}} = \widehat{\overline{A}_o\,\overline{B}_o} + \widehat{\overline{B}_o\,\overline{C}_o} = \hat{r} + \hat{s} = \widehat{r \circ s} = \widehat{\overline{A}_o\,\overline{C}_o} = \widehat{\overline{A}\,\overline{C}}$$

$$\boxed{\widehat{\overline{A}\,\overline{B}} + \widehat{\overline{B}\,\overline{C}} = \widehat{\overline{A}\,\overline{C}}}$$

CALCULO ANGULAR

$\forall \overline{A}, \overline{B}, \overline{C} \in \overline{\mathfrak{D}}$

$$\widehat{\overline{A}\,\overline{B}} + \widehat{\overline{B}\,\overline{C}} = \widehat{\overline{A}\,\overline{C}}$$

$$\widehat{\overline{A}\,\overline{A}} = \widehat{\overline{B}\,\overline{B}} = \widehat{\overline{C}\,\overline{C}} = O \quad \text{(ángulo nulo)}$$

$$-\widehat{\overline{A}\,\overline{B}} = \widehat{\overline{B}\,\overline{A}}$$

Las dos fórmulas últimas se deducen de la primera (teniendo en cuenta que A , + es un grupo)

Con las notaciones evidentes

$$\widehat{\overline{A}\,\overline{B}} + \widehat{\overline{B}\,\overline{C}} + \ldots + \widehat{\overline{K}\,\overline{L}} = \widehat{\overline{A}\,\overline{L}}$$

$$\widehat{\overline{A}\,\overline{B}} + \widehat{\overline{B}\,\overline{C}} + \ldots + \widehat{\overline{K}\,\overline{L}} + \widehat{\overline{L}\,\overline{A}} = O$$

2 – LAS DOS MITADES DE TODO ANGULO

DEFINICION 1

$\forall \alpha \in A \quad : \quad 2\alpha = \alpha + \alpha$

El ángulo 2α *se denomina el* **doble** *de* α

DEFINICION 2

El ángulo β *es una* **mitad** *del ángulo* α

ssi

$2\beta = \alpha$

ssi

El ángulo α *es el* **doble** *del ángulo* β

PROPOSICION

Todo ángulo admite exactamente DOS MITADES

O expresado de otro modo

PROPOSICION

Para todo ángulo α, *existen exactamente dos ángulos distintos* β , γ *tales que*

$2\beta = \alpha = 2\gamma$

$\mathfrak{R}_a$, o es un modelo perfecto de **A** , +

Traduzcamos el último enunciado en una proposición en $\mathfrak{R}_a$, o

PROPOSICION

Para toda rotación $r \in \mathfrak{R}_a$, *existen exactamente dos rotaciones distintas* p , $q \in \mathfrak{R}_a$ *tales que*

$$p^2 = r = q^2$$

(Recordemos que $p^2 = p \circ p$ y $q^2 = q \circ q$)

DEMOSTRACION :

He aquí $\overline{A} \in \overline{\mathfrak{D}}_a$

La rotación r aplica $\overline{A}$ sobre $\overline{B} \in \overline{\mathfrak{D}}_a$

Toda rotación $x \in \mathfrak{R}_a$ queda enteramente definida por la semirrecta $\overline{X}$ sobre la cual aplica $\overline{A}$

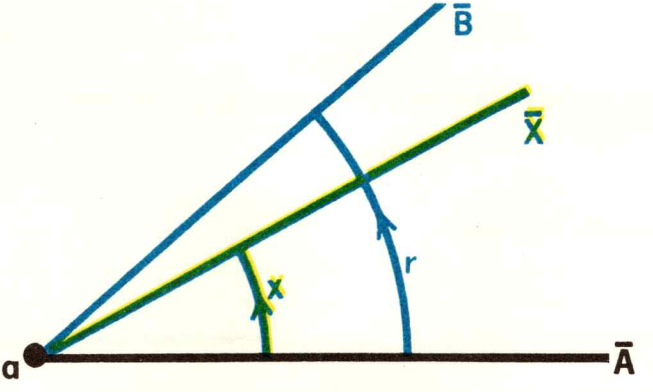


FIG. 267

– ¿Cuándo se tendrá $x^2 = r$

–

$$x^2 = r$$

ssi

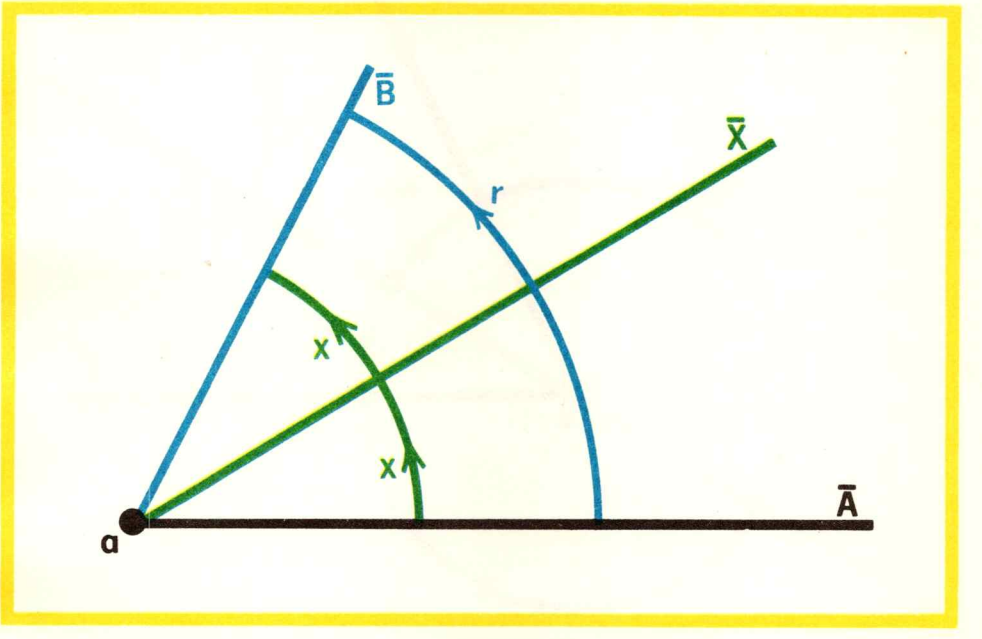


FIG. 268

– Lo vimos en el § 6 del capítulo 6

–

$$x^2 = r$$

ssi

la recta X que comprende a $\overline{X}$ *es la bisectriz de* $(\overline{A}, \overline{B})$

ssi

$\overline{X}$ *es una de las dos semirrectas cerradas de origen a incluidas en la bisectriz de* $(\overline{A}, \overline{B})$

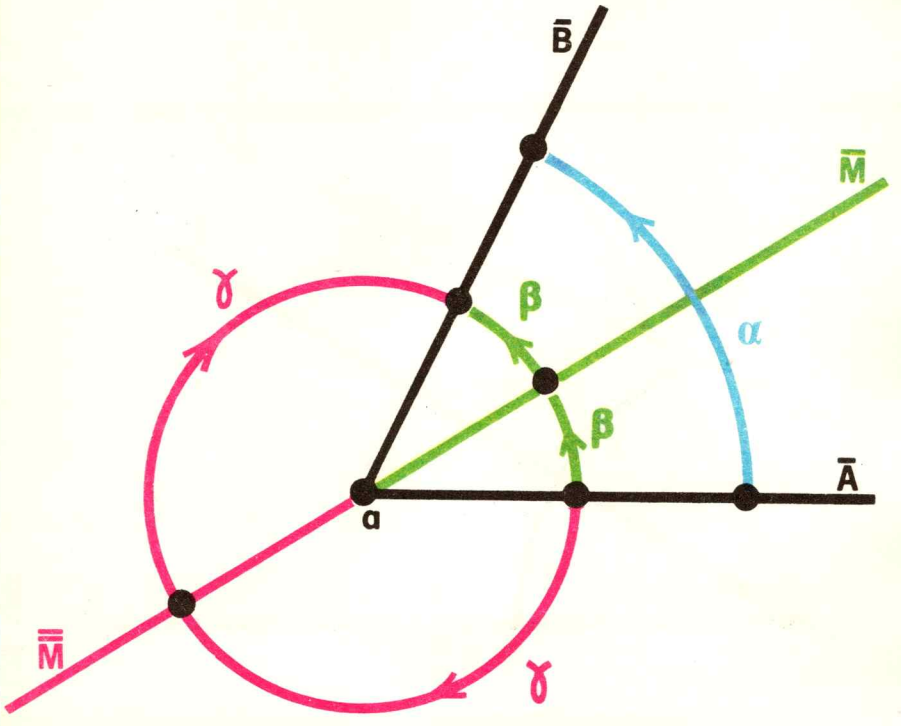


FIG. 269

Las DOS MITADES β **y** γ **del ángulo** α

Las DOS MITADES

$\widehat{\bar{A}\,\bar{B}}$

de $\widehat{\bar{A}\,\bar{B}}$

$\widehat{\bar{A}\,\bar{M}}$

$\widehat{\bar{A}\,\bar{\bar{M}}}$

$\bar{M}$ *y* $\bar{\bar{M}}$ *están incluidas en la bisectriz de* $(\bar{A}\,,\,\bar{B})$

¿Cuáles son las DOS MITADES **del** ANGULO NULO?

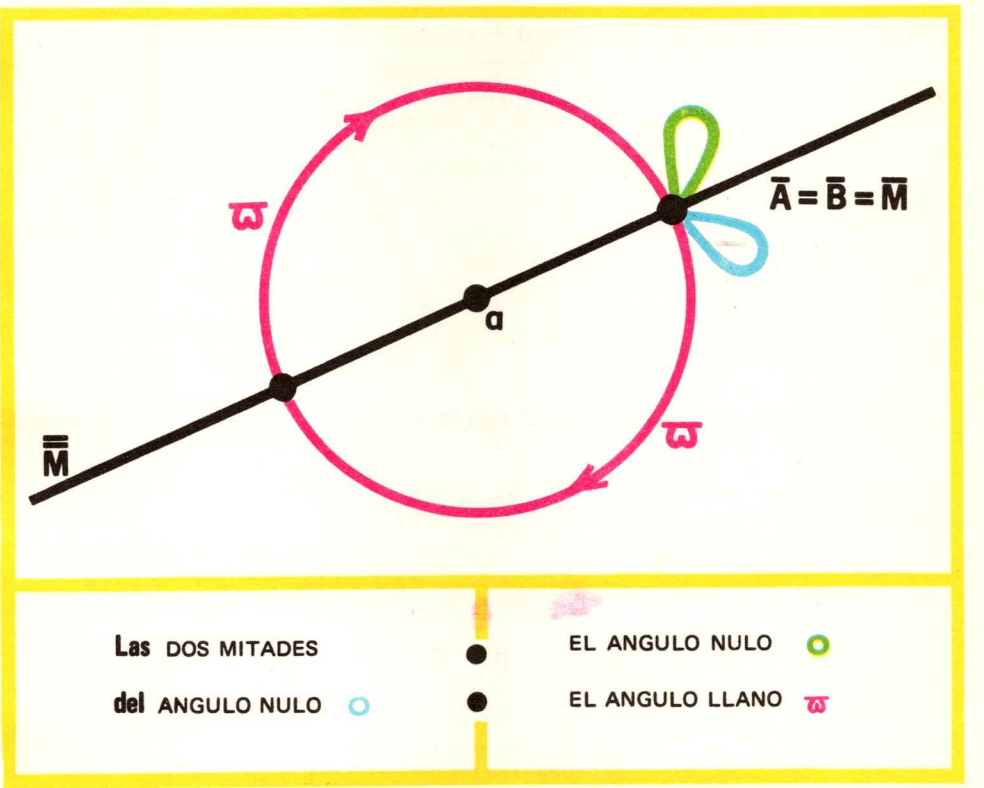


FIG. 270

El ángulo llano, siempre anotado ϖ , es la mitad no nula del ángulo nulo

En A , +
$0 + 0 = 0$
$\varpi + \varpi = 0$
$2\varpi = 0$
$-\varpi = \varpi$

En el grupo $\mathbf{A}, +$ notaremos

$$\forall n \in \omega_0 , \forall \alpha \in \mathbf{A} : n\alpha = \underbrace{\alpha + \alpha + \ldots + \alpha}_{n \text{ términos}}$$

$n\,\varpi$	$=$	0	cuando n es par
$n\,\varpi$	$=$	ϖ	cuando n es impar

— Compara las **dos mitades** β , γ del ángulo α (figura 269)

— He aquí:

$$\gamma = \overline{\overline{A}\,\overline{\overline{M}}}$$

$$= \overline{\overline{A}\,\overline{M}} + \overline{\overline{M}\,\overline{\overline{M}}} = \beta + \varpi$$

$$\gamma = \beta + \varpi$$

$$\beta = \gamma + \varpi$$

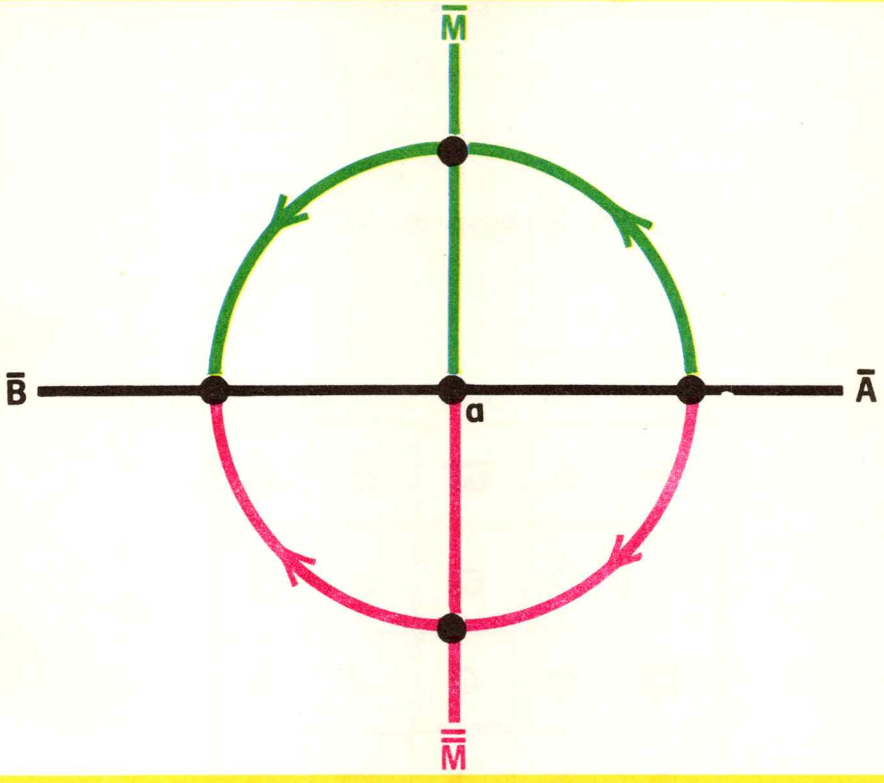
— En el grupo $\mathbf{A}, +$

$$\gamma - \beta = \varpi = \beta - \gamma$$

Las **DOS MITADES** *de un ángulo*

difieren en un **ángulo llano**

¿Cuáles son las DOS MITADES **del** ANGULO LLANO ϖ?



Las DOS MITADES *del Angulo llano*

se denominan ANGULOS RECTOS

$$= \overset{\frown}{\overline{A}\,\overline{M}} = \overset{\frown}{\overline{B}\,\overline{\overline{M}}} = -\overset{\frown}{\overline{\overline{M}}\,\overline{B}} = -$$

§ 2

Los dos ángulos rectos son opuestos uno del otro

Si se anota a uno de ellos δ *. . . entonces el otro será* $-\delta$

FIG. 271

Cálculos sencillos

$$2\delta = \varpi$$

$$4\delta = 2\varpi = O$$

$$3\delta + \delta = 4\delta = O$$

$$3\delta = -\delta$$

$\{O, \delta, -\delta, \varpi\}, +$ es un subgrupo de $A, +$

Su tabla de adición es la siguiente :

+	o	ϖ	δ	-δ
o	o	ϖ	δ	δ
ϖ	ϖ	o	-δ	δ
δ	δ	-δ	ϖ	o
-δ	-δ	δ	o	ϖ

EL GRUPO CICLICO ENGENDRADO POR δ
... Y SUS SUBGRUPOS

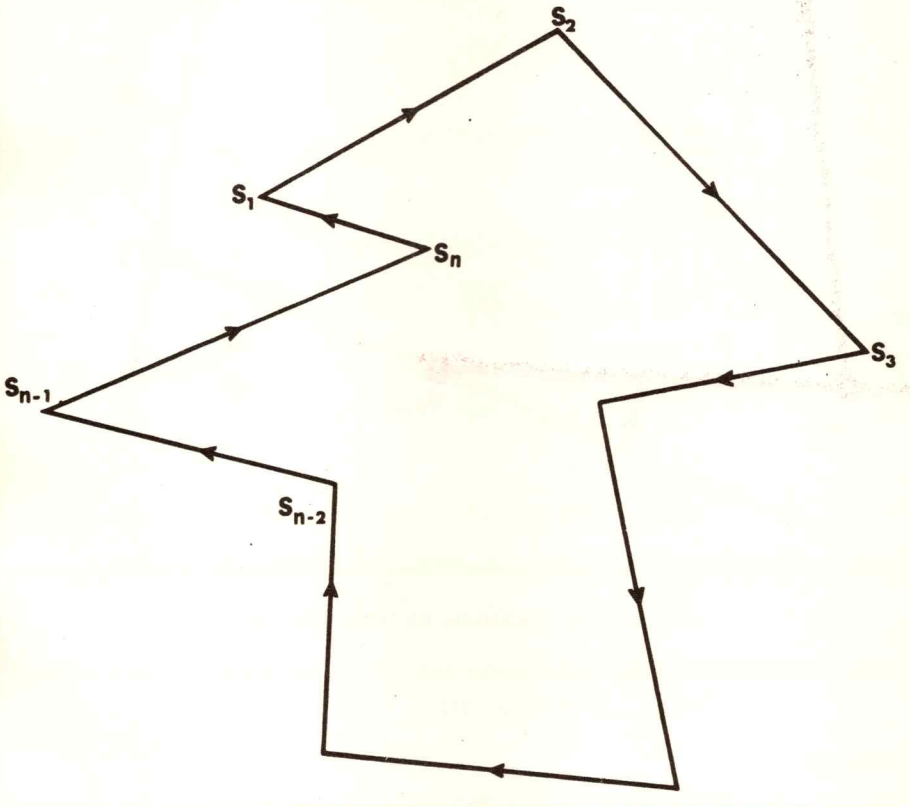
3 – ANGULOS DE UN POLIGONO ORDENADO

Se dice que la sucesión finita de puntos

$$s_1 \neq s_2 \neq s_3 \neq \ldots \neq s_{n-1} \neq s_n \neq s_1$$

define al polígono ordenado $s_1\ s_2\ \ldots\ s_n$

Esquema

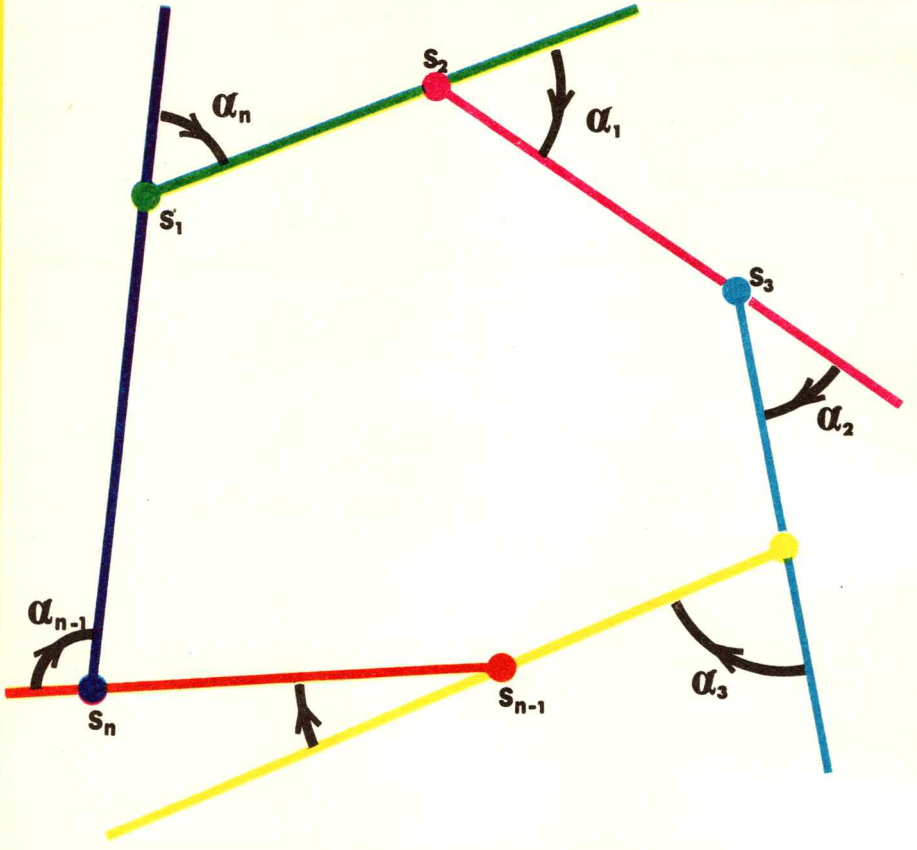


EL POLIGONO ORDENADO $s_1\ s_2\ \ldots\ s_n$

Los **puntos** $s_1, \ldots, s_n$ *son los* **vértices** *del polígono* $s_1 \ldots s_n$

FIG. 272

DEFINICION 1



$\alpha_1 , \ldots , \alpha_n$ SON LOS **ANGULOS EXTERIORES** DE $s_1 \ldots s_n$

FIG. 273

Hagamos

$$\overline{C}_1 = [\, s_1 s_2 \; ; \overline{C}_2 = [\, s_2 s_3 \; ; \ldots ; \overline{C}_{n-1} = [\, s_{n-1} s_n \; ; \overline{C}_n = [\, s_n s_1$$

— Expresa los ángulos exteriores

— He aquí

$$\alpha_1 = \widehat{\overline{C}_1 \overline{C}_2} \; ; \alpha_2 = \widehat{\overline{C}_2 \overline{C}_3} \; ; \ldots ; \alpha_{n-1} = \widehat{\overline{C}_{n-1} \overline{C}_n} \; ; \alpha_n = \widehat{\overline{C}_n \overline{C}_1}$$

— Calcula su suma.

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{n-1} + \alpha_n$$

$$= \widehat{\overline{C}_1 \overline{C}_2} + \widehat{\overline{C}_2 \overline{C}_3} + \ldots + \widehat{\overline{C}_{n-1} \overline{C}_n} + \widehat{\overline{C}_n \overline{C}_1} = 0$$

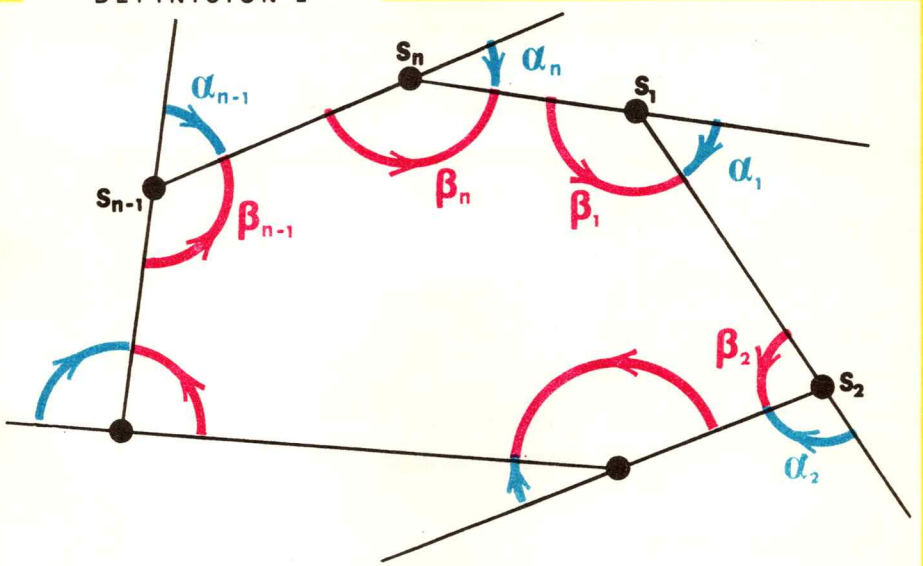
Acabamos de establecer la

PROPOSICION 1

La suma de los ángulos exteriores de un polígono ordenado es nula.

— He aquí los angulos interiores de $s_1 \ldots s_n$

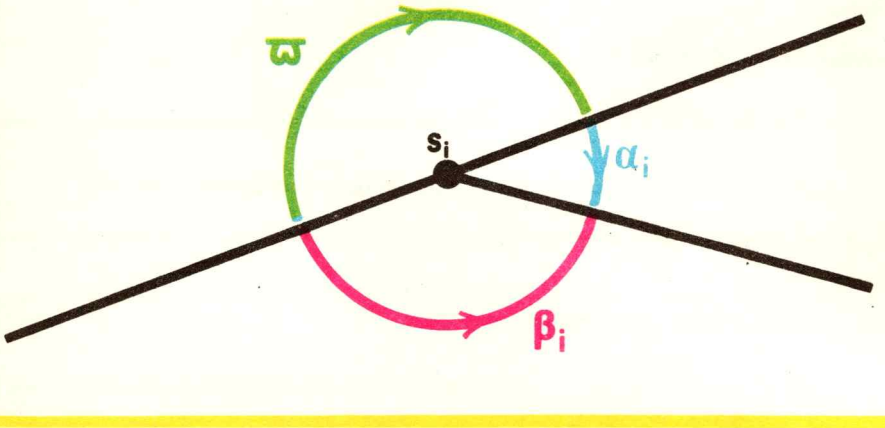
DEFINICION 2



$\beta_1, \ldots, \beta_n$ SON LOS **ANGULOS INTERIORES** DE $s_1 \ldots s_n$

FIG. 274

En cada uno de los vértices :



$$\beta_i = \varpi + \alpha_i$$

FIG. 275

$$\begin{aligned}
&\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n \\
&= \varpi + \alpha_1 + \varpi + \alpha_2 + \ldots + \varpi + \alpha_n \\
&= n\,\varpi + (\alpha_1 + \ldots + \alpha_n) \\
&= n\,\varpi \text{ es decir } \begin{cases} 0 & \text{cuando } n \text{ es par} \\ \dot{\varpi} & \text{cuando } n \text{ es impar} \end{cases}
\end{aligned}$$

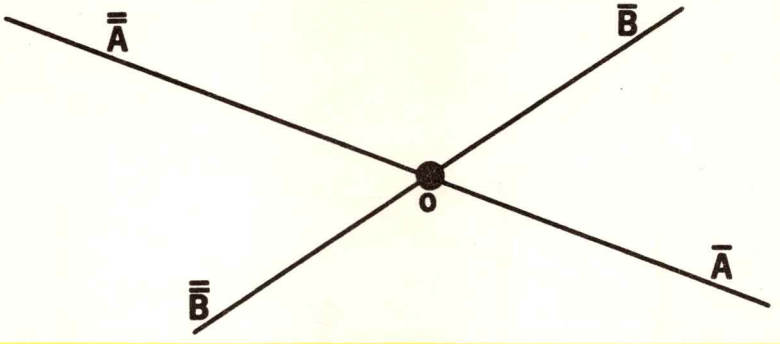
Así hemos probado la

PROPOSICION 2

La suma de los **ángulos interiores** *de un polígono ordenado* $s_1 \ldots s_n$ **es igual a**

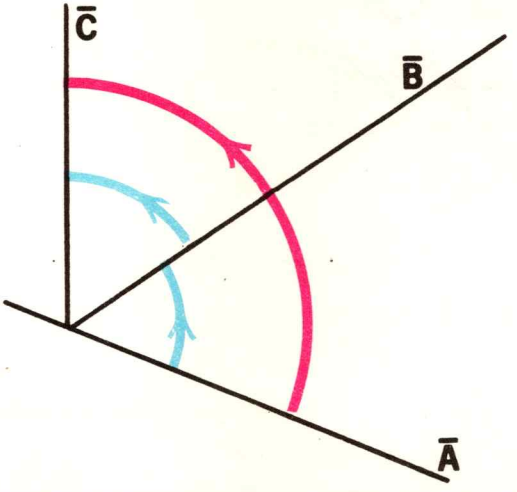
0	**ϖ**
cuando **n** *es par*	*cuando* **n** *es impar*

4 — SIMETRIAS Y ROTACION



¿Cuál es el ángulo de la rotación $s_B \circ s_A$*?*

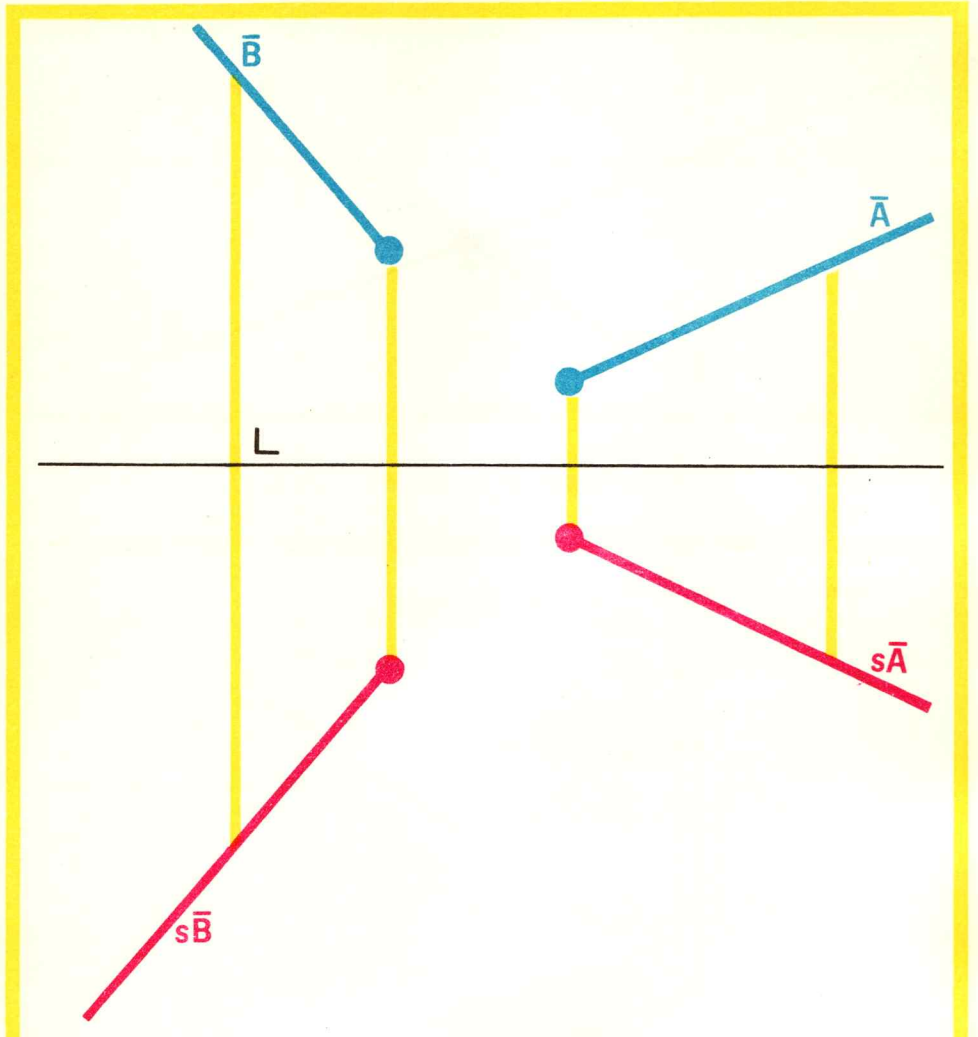
Hagamos $\overline{C} = s_B\,\overline{A} = s_B \circ s_A \cdot \overline{A}$



$$\widehat{S_B \circ S_A} = 2\,\widehat{\overline{A}\,\overline{B}} = 2\,\widehat{A\,\overline{\overline{B}}} = 2\,\widehat{\overline{\overline{A}}\,\overline{B}} = 2\,\widehat{\overline{\overline{A}}\,\overline{\overline{B}}}$$

FIG. 276

5 – ISOMETRIAS



PROPOSICION 1

$$\widehat{s\bar{A}\,.\,s\bar{B}} = -\widehat{\bar{A}\bar{B}} = \widehat{\bar{B}\bar{A}}$$

O expresado de otro modo

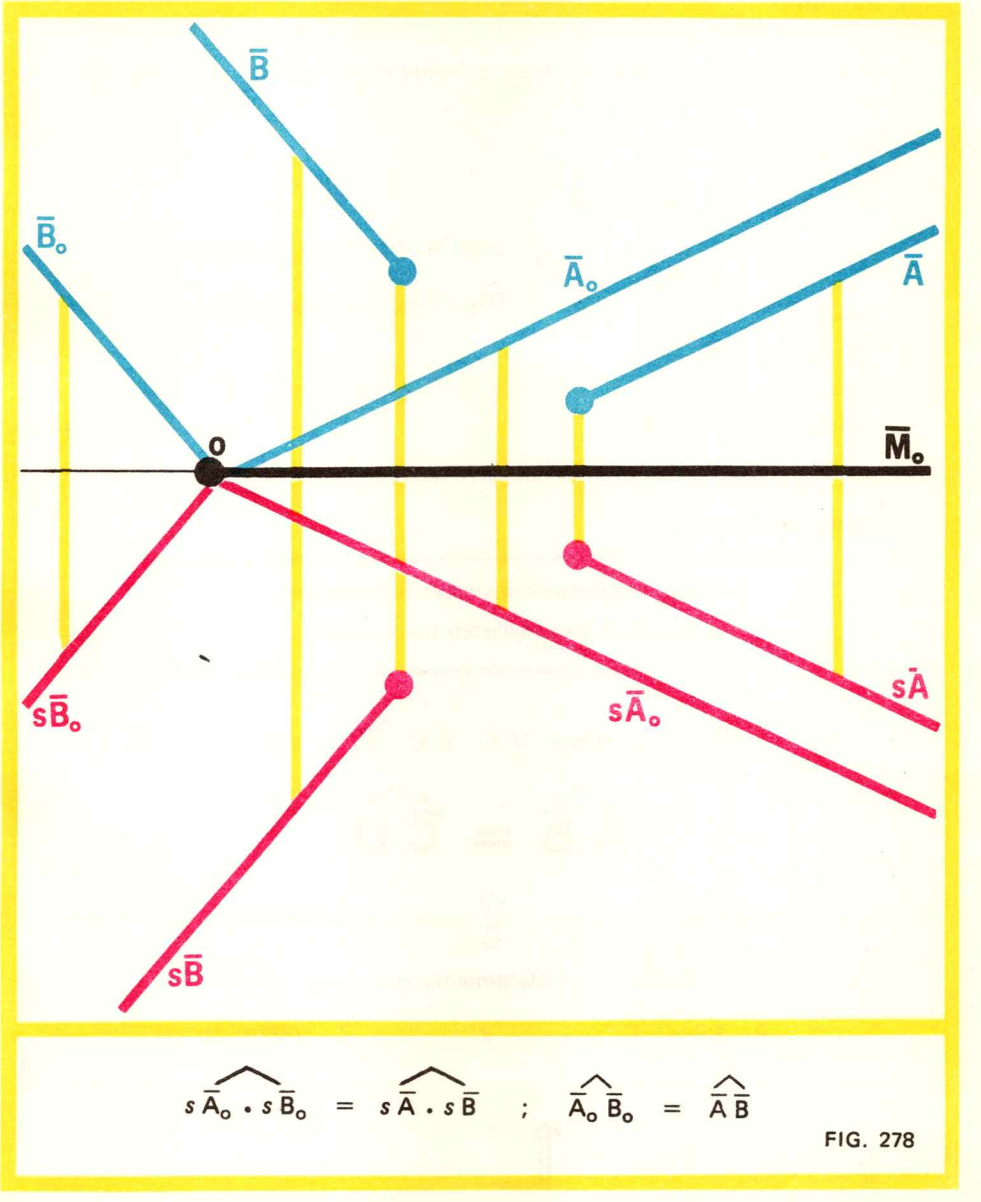
Las SIMETRIAS invierten los ANGULOS

FIG. 277

He aquí un punto o del eje de la simetría.

Llamemos $\overline{A}_o$, $\overline{B}_o$ a las semirrectas de origen o equipolentes a $\overline{A}$, $\overline{B}$

$s\overline{A}_o$, $s\overline{B}_o$ son equipolentes a $s\overline{A}$, $s\overline{B}$ (2 , 6)



$$\widehat{s\overline{A}_o \cdot s\overline{B}_o} = \widehat{s\overline{A} \cdot s\overline{B}} \quad ; \quad \widehat{\overline{A}_o \overline{B}_o} = \widehat{\overline{A}\,\overline{B}}$$

FIG. 278

Debemos establecer que :

$$\overset{\frown}{s\,A_o \cdot s\,B_o} = -\overset{\frown}{A_o\,B_o}$$

DEMOSTRACION :

$\overline{M}_o$ es una semirrecta cerrada de origen o incluida en el eje M de la simetría.

$$\overset{\frown}{s\,\overline{A}_o \cdot s\,\overline{B}_o}$$

$$= \overset{\frown}{s\,\overline{A}_o \cdot \overline{M}_o} + \overset{\frown}{\overline{M}_o \cdot s\,\overline{B}_o}$$

$$= \overset{\frown}{\overline{M}_o\,\overline{A}_o} + \overset{\frown}{\overline{B}_o\,\overline{M}_o}$$

$$= \overset{\frown}{\overline{B}_o\,\overline{M}_o} + \overset{\frown}{\overline{M}_o\,\overline{A}_o}$$

$$= \overset{\frown}{\overline{B}_o\,\overline{A}_o} = -\overset{\frown}{\overline{A}_o\,\overline{B}_o}$$

pues M es bisectriz de las cuplas $(\overline{A}_o\ ,\ s\,\overline{A}_o)$ y $(\overline{B}_o\ ,\ s\,\overline{B}_o)$

l.q.q.d.

Consecuencia inmediata

Los desplazamientos invierten los ángulos.
Los rebatimientos invierten los ángulos.

PROPOSICION 2 $\Longleftarrow$ $\forall\ \overline{A}\ ,\ \overline{B} \in \overline{\mathfrak{D}}_x\ ;\ \forall\ \overline{C}\ ,\ \overline{D} \in \overline{\mathfrak{D}}_o$

$$\overset{\frown}{\overline{A}\,\overline{B}} = \overset{\frown}{\overline{C}\,\overline{D}}$$

$\Updownarrow$

Existe un desplazamiento que aplica

$\overline{A}$ sobre $\overline{C}$ y $\overline{B}$ sobre $\overline{D}$

Ya hemos establecido la implicación $\Uparrow$

DEMOSTRACION DE ⇓

La traslación $t = \overrightarrow{x\,o}$ aplica $\overline{A}$ sobre $\overline{A}_o$, $\overline{B}$ sobre $\overline{B}_o$

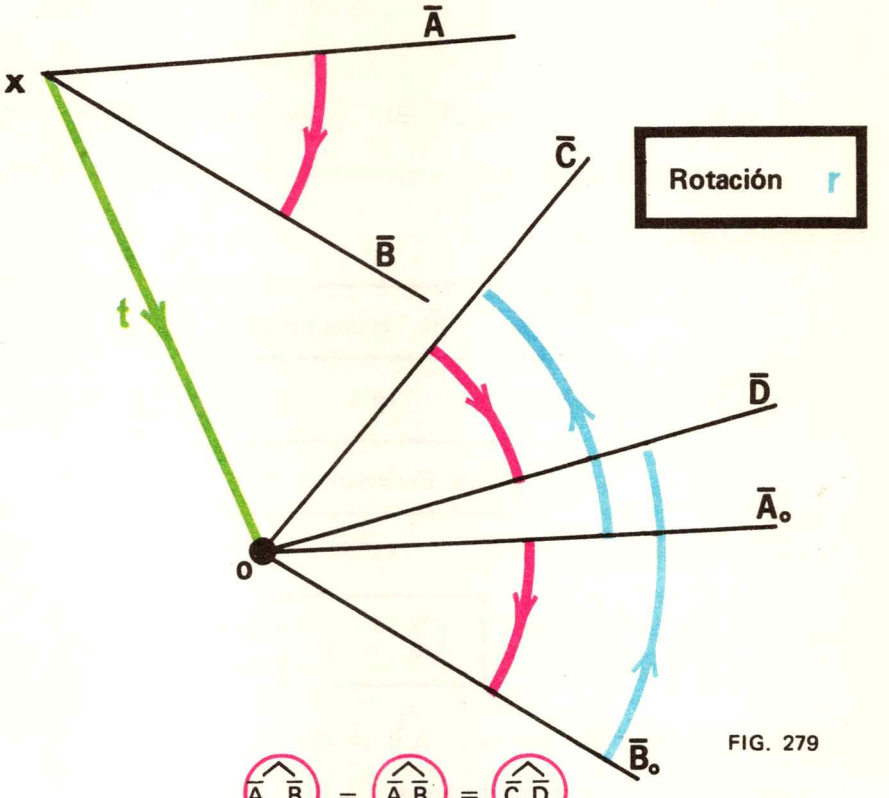


FIG. 279

$$\widehat{\overline{A}_o\,\overline{B}_o} = \widehat{\overline{A}\,\overline{B}} = \widehat{\overline{C}\,\overline{D}}$$

$$\widehat{\overline{A}_o\,\overline{B}_o} = \widehat{\overline{C}\,\overline{D}}$$

$$\left.\begin{aligned} \widehat{\overline{A}_o\,\overline{C}} &= \widehat{\overline{A}_o\,\overline{B}_o} + \widehat{\overline{B}_o\,\overline{C}} \\ \widehat{\overline{B}_o\,\overline{D}} &= \widehat{\overline{B}_o\,\overline{C}} + \widehat{\overline{C}\,\overline{D}} \end{aligned}\right\} \text{ de donde } \widehat{\overline{A}_o\,\overline{C}} = \widehat{\overline{B}_o\,\overline{D}}$$

La rotación r de centro o y de ángulo $\widehat{\overline{A}_o\,\overline{C}} = \widehat{\overline{B}_o\,\overline{D}}$

aplica $\overline{A}_o$ sobre $\overline{C}$ $\overline{B}_o$ sobre $\overline{D}$

El desplazamiento r o t aplica $\overline{A}$ sobre $\overline{C}$ y $\overline{B}$ sobre $\overline{D}$

l.q.q.d.

6 – ANGULO DE UN DESPLAZAMIENTO

PROPOSICION 1 $\quad \forall \overline{A}, \overline{B} \in \overline{\mathfrak{D}}$

$\widehat{\overline{A}\,\overline{B}} = 0 \Longrightarrow$ desp $(\overline{A}, \overline{B})$ es una traslación

$\widehat{\overline{A}\,\overline{B}} \neq 0 \Longrightarrow$ desp $(\overline{A}, \overline{B})$ es una rotación de ángulo $\widehat{\overline{A}\,\overline{B}}$

DEMOSTRACION :

1.

desp $(\overline{A}, \overline{B})$ es una traslación

ssi

$\overline{A}$ es equipolente a $\overline{B}$

ssi

$\widehat{\overline{A}\,\overline{B}} = 0$

2. He aquí $\overline{A}, \overline{B} \in \overline{\mathfrak{D}}$ tales que $\widehat{\overline{A}\,\overline{B}} \neq 0$

Luego el desp $(\overline{A}, \overline{B})$ es una *rotación.*

Anotemos o al centro de la rotación desp $(\overline{A}, \overline{B})$

Llamemos $\overline{A}_o$, $\overline{B}_o$ a las semirrectas cerradas de origen o equipolentes a $\overline{A}$, $\overline{B}$

La rotación desp $(\overline{A}, \overline{B})$ aplica $\overline{A}$ sobre $\overline{B}$
aplica o sobre o
respeta la equipolencia

Por tanto desp $(\overline{A}, \overline{B})$ aplica $\overline{A}_o$ sobre $\overline{B}_o$

De donde $\overset{\frown}{\text{desp}\,(\overline{A}, \overline{B})} = \widehat{\overline{A}_o\,\overline{B}_o} = \widehat{\overline{A}\,\overline{B}}$

l.q.q.d.

Esta proposición sugiere la

DEFINICION

traslación = **desplazamiento de ángulo nulo**

que permite reformular brevemente la

PROPOSICION 1 — $\forall \bar{A}, \bar{B} \in \overline{\mathfrak{D}}$

$$\overset{\frown}{\text{desp}\,(\bar{A}, \bar{B})} = \hat{\bar{A}}\,\hat{\bar{B}}$$

PROPOSICION 2

$$\forall d_1, d_2 \in \mathfrak{I}^+ : \quad \overset{\frown}{d_1 \circ d_2} = \hat{d}_1 + \hat{d}_2$$

En particular,

La compuesta de una cupla de rotaciones es una traslación

ssi

los ángulos de las rotaciones son opuestos

La segunda parte de esta proposición es una consecuencia inmediata de la proposición propiamente dicha.

DEMOSTRACION :

Sea $\overline{A} \in \overline{\mathfrak{D}}$

Hagamos $d_2\ \overline{A} = \overline{B}$ $\qquad$ $d_1\ \overline{B} = \overline{C}$

Luego $d_2 = \text{desp}\ (\overline{A}\ \overline{B})$ $\qquad$ $d_1 = \text{desp}\ (\overline{B}\ \overline{C})$ $\qquad$ $d_1 \circ d_2 = \text{desp}\ (\overline{A}\ \overline{C})$

$$\widehat{d_1 \circ d_2} = \widehat{\text{desp}\ (\overline{A}\ \overline{C})}$$

$$= \widehat{\overline{A}\ \overline{C}} \qquad \text{(proposición 1)}$$

$$= \widehat{\overline{A}\ \overline{B}} + \widehat{\overline{B}\ \overline{C}} \qquad \text{(cálculo angular)}$$

$$= \widehat{\text{desp}\ (\overline{A}\ \overline{B})} + \widehat{\text{desp}\ (\overline{B}\ \overline{C})} \qquad \text{(proposición 1)}$$

$$= \hat{d}_2 + \hat{d}_1$$

l.q.q.d.

La proposición 2 se expresa también diciendo que

$$\mathfrak{I}^+, \circ \rightarrow A, + \ : \ d \rightarrow \hat{d}$$

es un **morfismo suryectivo**

7 – EJERCICIOS

1. La suma de los ángulos interiores de un triángulo ordenado es igual a un ángulo llano.

2. **Si** α , β , γ son ángulos de un triángulo ordenado

   Entonces $\alpha + \beta + \gamma = \varpi$ y $2(\alpha + \beta + \gamma) = o$

3. **Si** $\overline{A}$, $\overline{\overline{A}}$ son semirrectas cerradas opuestas de origen o

   y $\overline{B}$ es una semirrecta cerrada de origen o

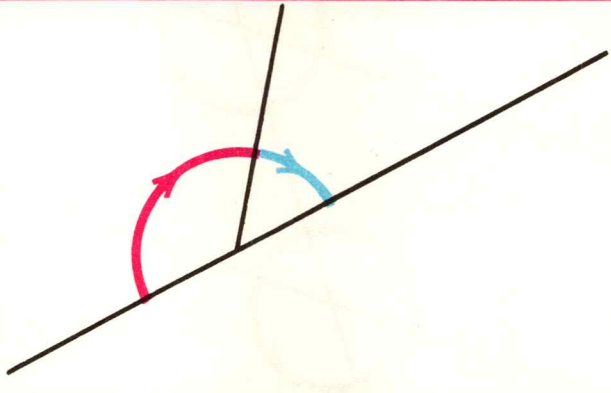
   Entonces $\widehat{\overline{A}\,\overline{B}} + \widehat{\overline{B}\,\overline{\overline{A}}} = \varpi$

DEFINICION

Los ángulos α , β son **SUPLEMENTARIOS**

ssi

$\alpha + \beta = \varpi$



ANGULOS SUPLEMENTARIOS

FIG. 280

4.

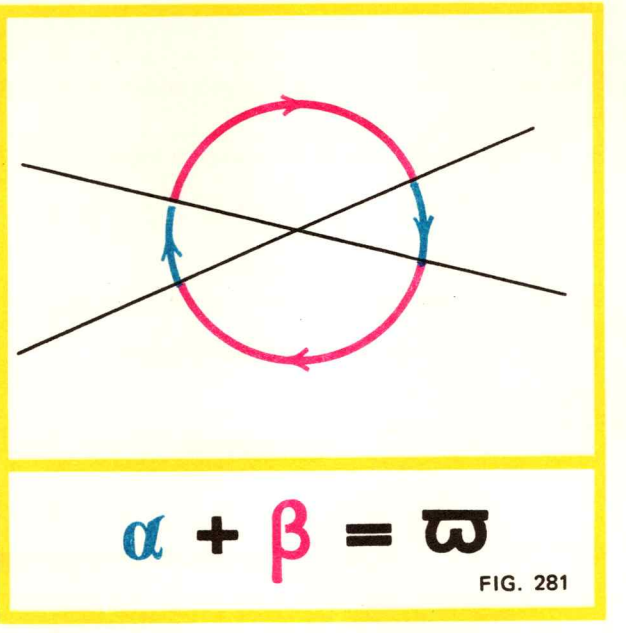


FIG. 281

¡Comenta!

5.

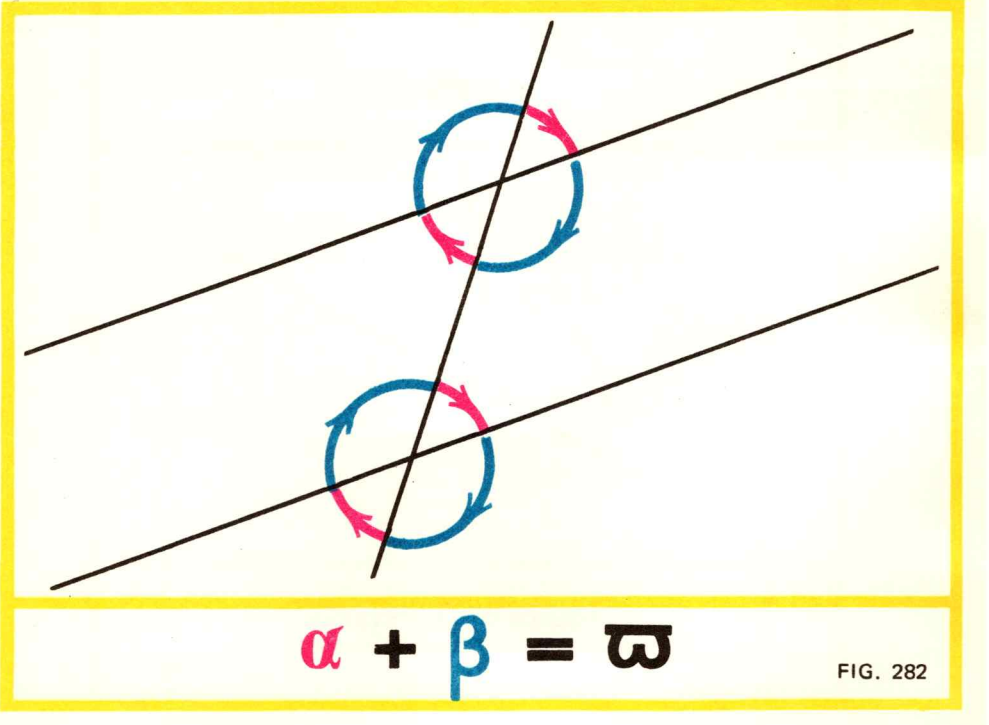
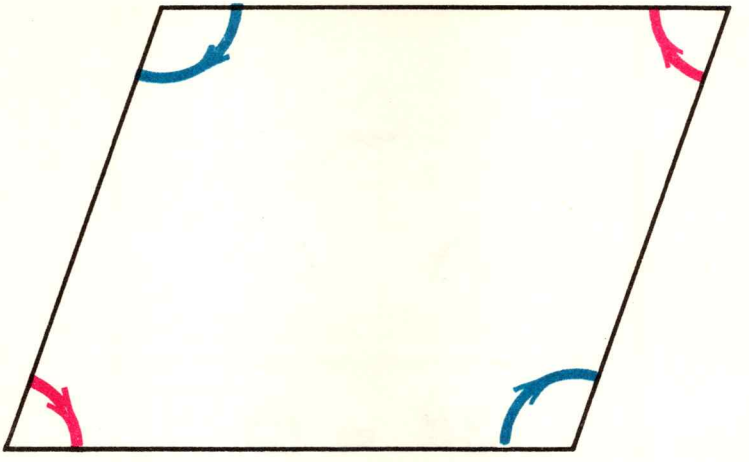


FIG. 282

6.



$$\alpha + \beta = \varpi$$

FIG. 283

7.

TRIANGULO ISOSCELES ORDENADO

(cuyo eje comprende a *a*)

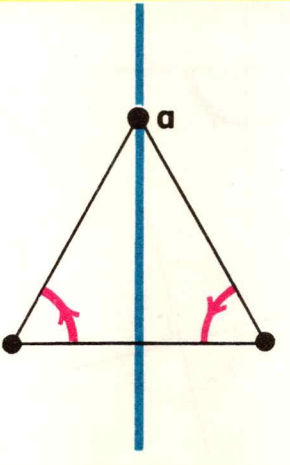


FIG. 284

¡Enuncia!

¡Demuestra!

8.

¡Enuncia!

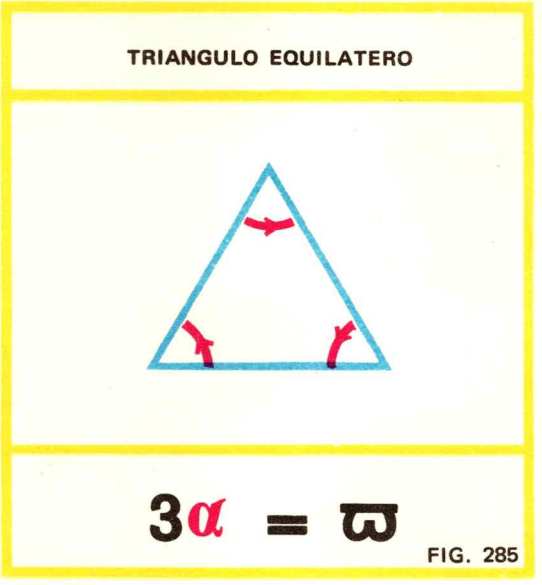


FIG. 285

¡Demuestra!

9. **Si** α , β , γ son los ángulos interiores del triángulo *abc*

Entonces $-\gamma$, $-\beta$, $-\alpha$ son los ángulos interiores del triángulo *cba*

10.

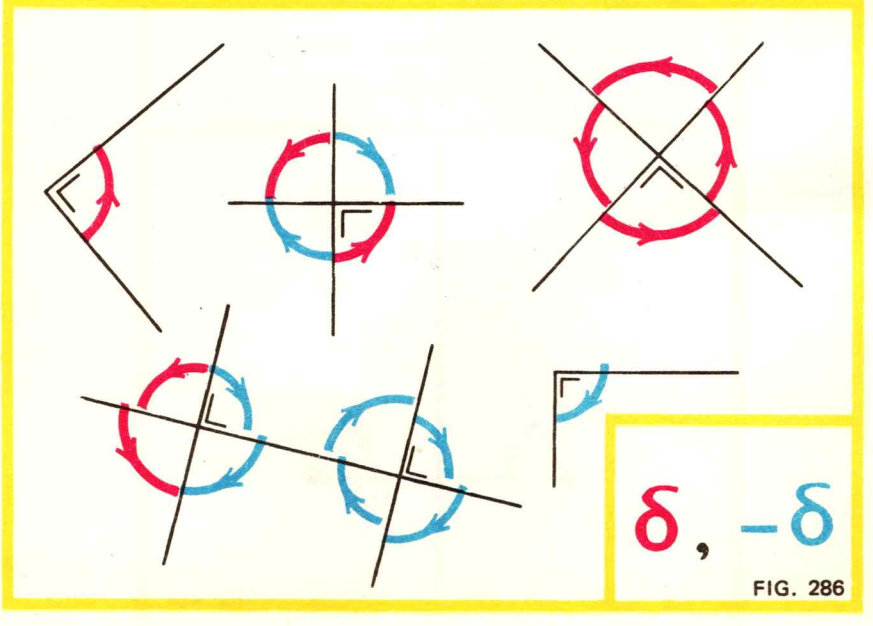


FIG. 286

¡Comenta!

11. $\forall\, \overline{A}\,,\, \overline{B} \in \overline{\mathfrak{D}}_x$ $\qquad$ $\forall\, \overline{C}\,,\, \overline{D} \in \overline{\mathfrak{D}}_o$

$$\widehat{\overline{C}\,\overline{D}} = -\widehat{\overline{A}\,\overline{B}}$$

$\Updownarrow$

Existe un **rebatimiento**

que aplica

$\overline{A}$ *sobre* $\overline{C}$ $\qquad$ $\overline{B}$ *sobre* $\overline{D}$

Los ángulos α y β se dicen iguales en valor absoluto

ssi

$$\beta = \pm\, \alpha$$

lo que se expresa

$$|\beta| = |\alpha|$$

12. $\forall\, \overline{A}\,,\, \overline{B} \in \overline{\mathfrak{D}}_x$ $\qquad$ $\forall\, \overline{C}\,,\, \overline{D} \in \overline{\mathfrak{D}}_o$

$$|\widehat{\overline{C}\,\overline{D}}| = |\widehat{\overline{A}\,\overline{B}}|$$

$\Updownarrow$

Existe una **isometría**

que aplica

$\overline{A}$ *sobre* $\overline{C}$ $\qquad$ $\overline{B}$ *sobre* $\overline{D}$

13.

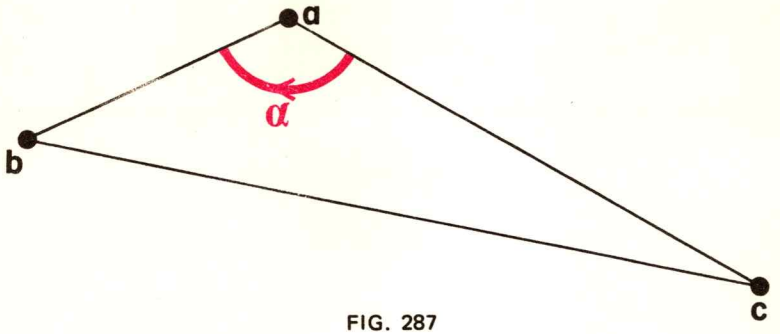


FIG. 287

Triángulos ordenados abc y a'b'c'

$d(a\ ,\ b) = d(a'\ ,\ b')$

$d(a\ ,\ c) = d(a'\ ,\ c')$

y	y	y
$\alpha = \alpha'$	$\alpha = -\alpha$	$\lvert\alpha\rvert = \lvert\alpha'\rvert$
⇕	⇕	⇕
	existe	
un desplazamiento	**un rebatimiento**	**una isometría**

que aplica

a sobre a' *b sobre b'* *c sobre c'*

¡Explica! ¡Comenta! ¡Demuestra!

14.

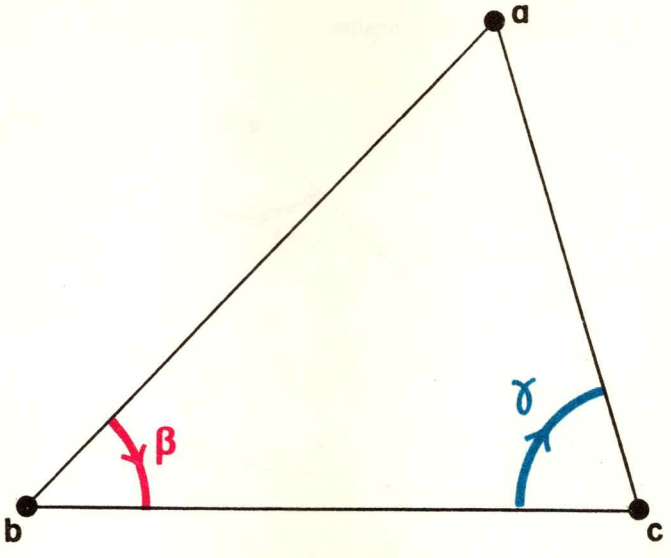


FIG. 288

Triángulos ordenados abc *y* $a'b'c'$

$$d(b, c) = d(b', c')$$

y	y
$\beta = \beta'$	$\beta = -\beta'$
$\gamma = \gamma'$	$\gamma = -\gamma'$

existe

un desplazamiento	**un rebatimiento**

que aplica

a sobre a'	*b sobre b'*	*c sobre c'*

¡Explica! ¡Comenta! ¡Demuestra!

15. He aquí dos ternas de puntos no alineados $a\ b\ c$ y $a'\ b'\ c'$

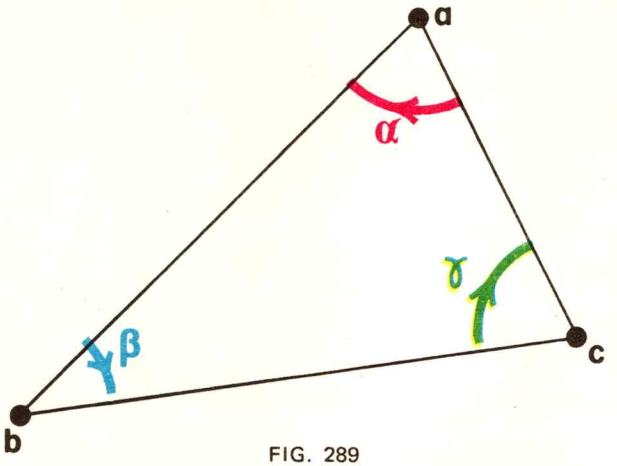


FIG. 289

$$|\alpha| = |\alpha'| \qquad |\beta| = |\beta'| \qquad |\gamma| = |\gamma'|$$

$$\Updownarrow$$

$$\alpha = \alpha' \qquad \text{o} \qquad \alpha = -\alpha'$$
$$\beta = \beta' \qquad\qquad \beta = -\beta'$$
$$\gamma = \gamma' \qquad\qquad \gamma = -\gamma'$$

16. Toda homotecia conserva la equipolencia (M M2 9.9)

y aplica toda semirrecta cerrada

sobre una semirrecta cerrada (M M2 9.11)

He aquí las semirrectas cerradas equipolentes $\overline{A}$, $\overline{B}$ y una homotecia h

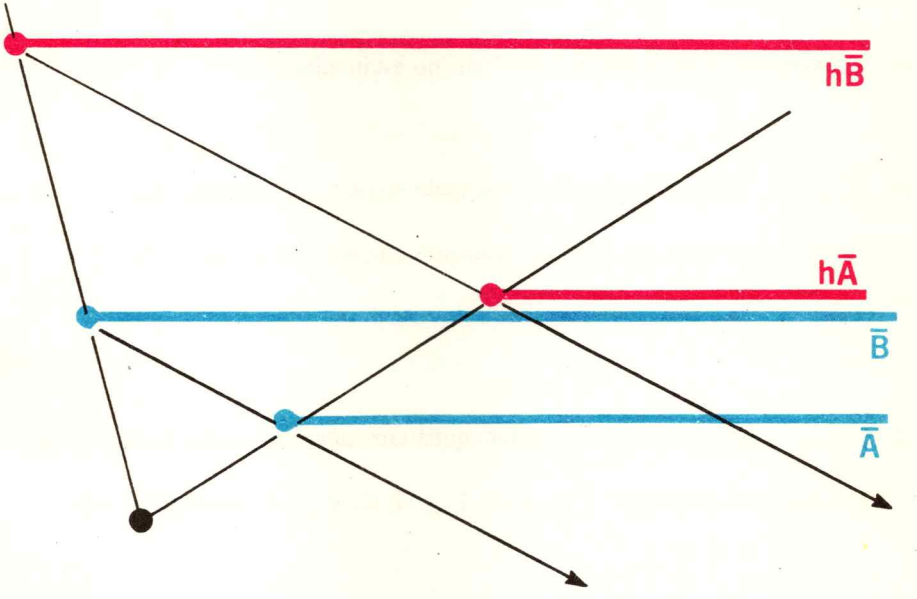


FIG. 290

Las imágenes $h\,\overline{A}$ y $h\,\overline{B}$ son equipolentes.

17. Las homotecias conservan los ángulos.

O expresado en otra forma :

Para toda homotecia h y toda cupla de semirrectas cerradas $\overline{A}$, $\overline{B}$

$$\widehat{h\,\overline{A} \cdot h\,\overline{B}} = \widehat{\overline{A}\,\overline{B}}$$

18. $\forall\, \alpha \in \mathbf{A} \quad : \quad \alpha = -\alpha \quad \Longleftrightarrow \quad (\alpha = 0 \quad o \quad \alpha = \varpi)$

19. Los vértices de un triángulo equilátero no están alineados.

20. **Si** α es el ángulo de un triángulo equilátero ordenado abc

Entonces $-\alpha$ es el ángulo de un triángulo equilátero ordenado cba

y $-\alpha \neq \alpha$

21. **Si** los lados de los triángulos equiláteros abc , def tienen la misma longitud,

Entonces los conjuntos $\{ a , b , c \}$ y $\{ d , e , f \}$ son isométricos.

22. Los ángulos de dos triángulos equiláteros (ordenados) cuyos lados tienen igual longitud son iguales en valor absoluto.

23. Toda homotecia de razón k conserva el ángulo de un triángulo equilátero y multica la longitud de sus lados por $| k |$

24. Todos los triángulos equiláteros tienen mismo ángulo en valor absoluto.

25. Si α designa el ángulo de un triángulo equilátero

Entonces $3\alpha = \varpi$ y $6\alpha = o$

Pues

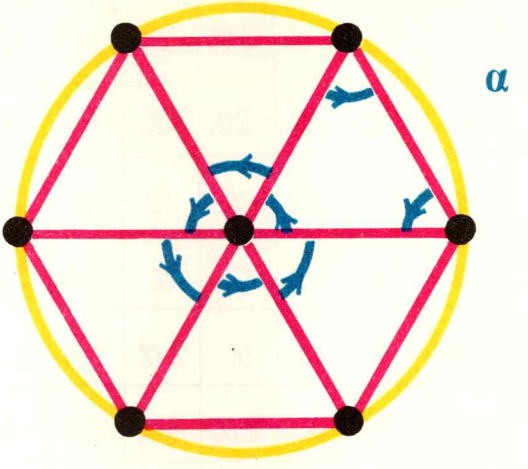


FIG. 291

Grupo engendrado por el ángulo α de un triángulo equilátero.

+	α	2α	3α	4α	5α	O
α	2α	3α	4α	5α	O	α
2α	3α	4α	5α	O	α	2α
3α	4α	5α	O	α	2α	3α
4α	5α	O	α	2α	3α	4α
5α	O	α	2α	3α	4α	5α
O	α	2α	3α	4α	5α	O

$\alpha + 5\alpha = o$ $\quad 2\alpha + 4\alpha = o$ $\quad 3\alpha + 3\alpha = o$

$-\alpha = 5\alpha$ $\quad -2\alpha = 4\alpha$ $\quad -3\alpha = 3\alpha$

Nueva manera de escribir la tabla de adición

+	α	2α	3α	-2α	$-\alpha$	O
α	2α	3α	-2α	$-\alpha$	O	α
2α	3α	-2α	$-\alpha$	O	α	2α
3α	-2α	$-\alpha$	O	α	2α	3α
-2α	$-\alpha$	O	α	2α	3α	-2α
$-\alpha$	O	α	2α	3α	-2α	$-\alpha$
O	α	2α	3α	-2α	$-\alpha$	O

¿Cuáles son los subgrupos del grupo engendrado por α?

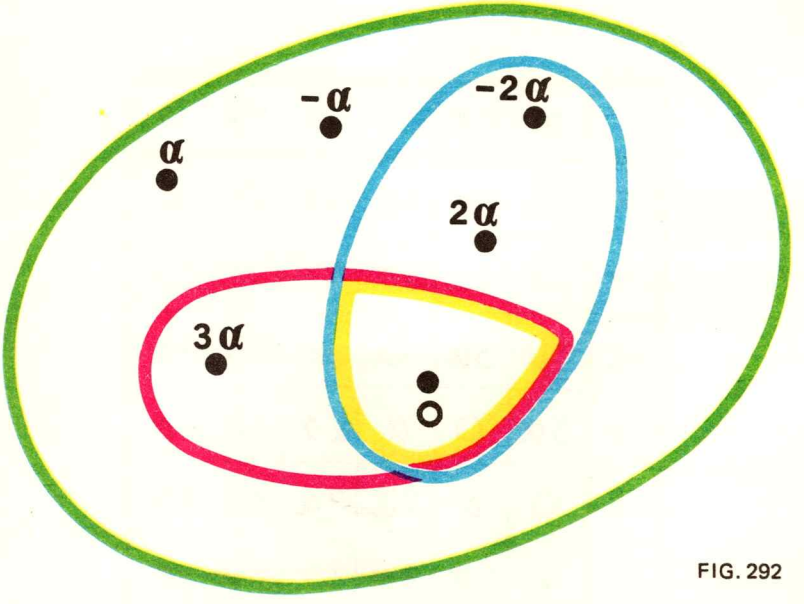


FIG. 292

26. Tenemos

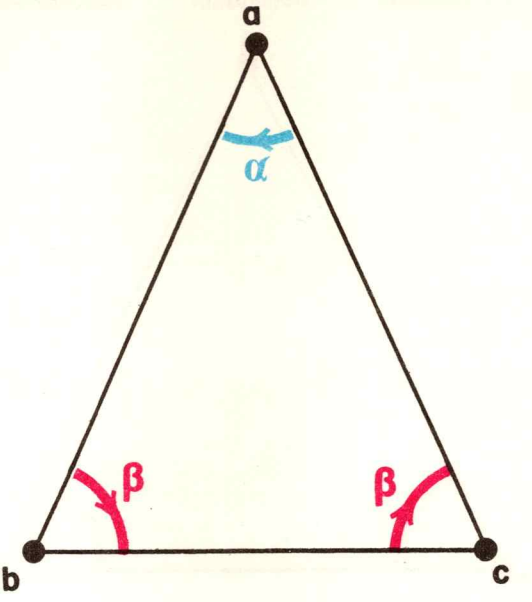


FIG. 293

Triángulo ordenado	c a b	b a c
Angulos interiores	β α β	−β −α −β

En virtud del ejercicio 12,
existe un rebatimiento que aplica c sobre b
a sobre a
b sobre c

Este rebatimiento que admite un punto fijo a
es una simetría cuyo eje comprende a a

El triángulo ordenado bac es isósceles.

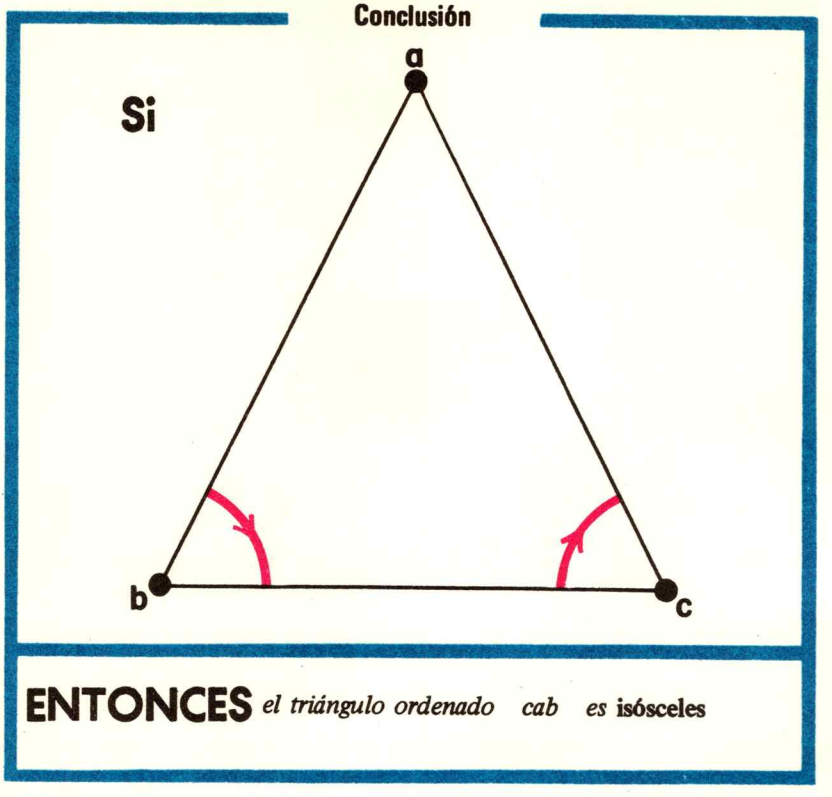


FIG. 294

27. **Si** los ángulos interiores de un triángulo ordenado son iguales

Entonces dicho triángulo es equilátero.

28. **Si** α es el ángulo de un triángulo equilátero

Entonces $3\alpha = \varpi$ y $\alpha \neq \varpi$

O también $3\varpi = \varpi$

29. He aquí un ángulo $\alpha \neq \varpi$

tal que $3\,\alpha = \varpi$

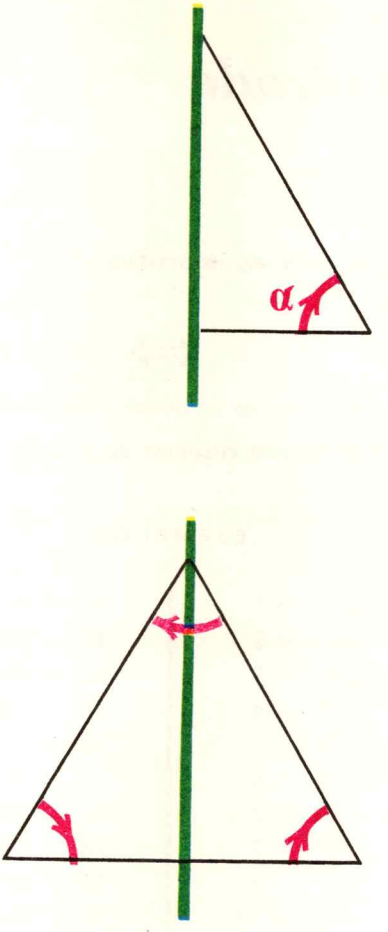


FIG. 295

Luego α es el ángulo de un triángulo equilátero.

30. Si α es el ángulo de un triángulo equilátero

Entonces $\alpha\ ,\ -\alpha\ ,\ \varpi$

son los tres tercios del ángulo ϖ

16

Raíz cuadrada

1 – RAIZ CUADRADA

El cuadrado de todo número real es positivo

Si $r, s \in \mathbf{R}^+$

Entonces $r < s \iff r^2 < s^2$

Para todo $a \in \mathbf{R}^+$, existe a lo más un número real positivo r tal que $r^2 = a$

A ese número r *se le llama* **raíz cuadrada de a.** *Se la anota* $\sqrt{a}$

EJEMPLOS

1.

$1^2 = 1$	$\sqrt{1} = 1$	$11^2 = 121$	$\sqrt{121} = 11$
$2^2 = 4$	$\sqrt{4} = 2$	$12^2 = 144$	$\sqrt{144} = 12$
$3^2 = 9$	$\sqrt{9} = 3$	$13^2 = 169$	$\sqrt{169} = 13$
$4^2 = 16$	$\sqrt{16} = 4$	$14^2 = 196$	$\sqrt{196} = 14$
$5^2 = 25$	$\sqrt{25} = 5$	$15^2 = 225$	$\sqrt{225} = 15$
$6^2 = 36$	$\sqrt{36} = 6$	$16^2 = 256$	$\sqrt{256} = 16$
$7^2 = 49$	$\sqrt{49} = 7$	$17^2 = 289$	$\sqrt{289} = 17$
$8^2 = 64$	$\sqrt{64} = 8$	$18^2 = 324$	$\sqrt{324} = 18$
$9^2 = 81$	$\sqrt{81} = 9$	$19^2 = 361$	$\sqrt{361} = 19$
$10^2 = 100$	$\sqrt{100} = 10$	$20^2 = 400$	$\sqrt{400} = 20$

2. $\sqrt{625} = 25$; $\sqrt{10.000} = 100$; $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$

$\sqrt{62.500} = 250$; $\sqrt{1.000.000} = 1.000$; $\sqrt{\frac{289}{16}} = \frac{17}{4}$

$\sqrt{0} = 0$

3. En virtud del teorema de Pitágoras

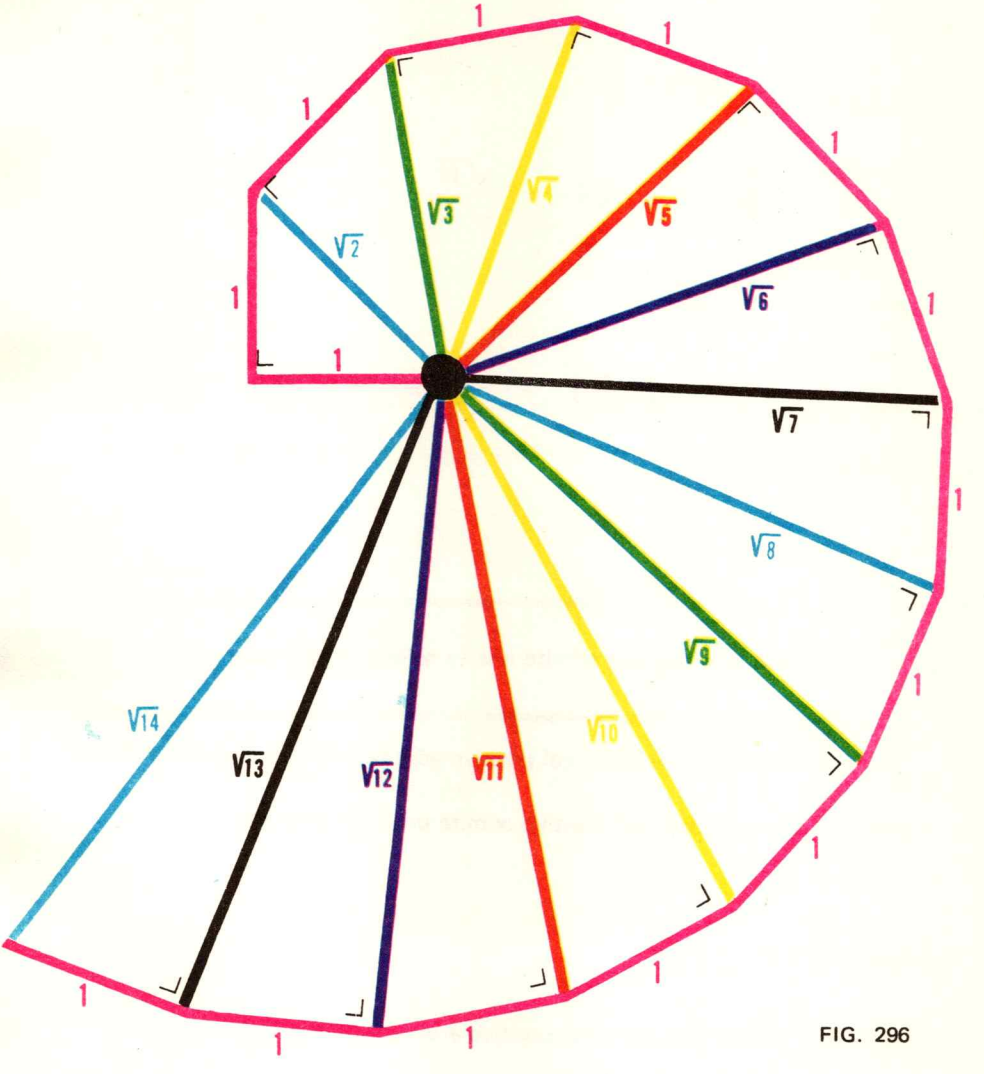


FIG. 296

TODO NATURAL ADMITE UNA RAIZ CUADRADA

4. Para todo natural n : $(\sqrt{n})^2 = n = \sqrt{n^2}$

5. *Todo racional positivo admite una raíz cuadrada.*

En efecto, todo racional positivo se escribe $q = \frac{m}{n}$, donde m y n son números naturales.

Por tanto,

$$\sqrt{q} = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$$

puesto que

$$\left(\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}\right)^2 = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}} = \frac{m}{n} = q$$

l.q.q.d.

TEOREMA

Todo real positivo admite una (y sólo una) raíz cuadrada.

Ya hemos indicado que todo real positivo admite a lo más una raíz cuadrada.

Falta probar que todo real positivo admite una raíz cuadrada.

DEMOSTRACION :

1º Tenemos un real estrictamente positivo a y

un natural m tal que $a^2 < m$

Por tanto : $a^2 < m \leqslant m^2$

$a^2 < m^2$

Para todo natural $w \geqslant m$: $a^2 < w^2$

El conjunto $\{ n \in \omega \mid n^2 \leqslant a \}$ es finito.

Llamemos r_0 al más grande natural de este conjunto, lo cual se anota

$$r_0 = \max \{ n \in \omega \mid n^2 \leqslant a \}$$

El natural r_0 así definido se denomina **raíz cuadrada entera de a** y está caracterizada por la doble desigualdad :

$$r_0^2 \leqslant a < (r_0 + 1)^2$$

que escribiremos también

$$r_0^2 \leqslant a < s_0^2 \qquad \text{(haciendo } s_0 = r_0 + 1\text{)}$$

Supongamos a r_0 expresado en binario.

Vamos a construir a partir de r_0 un número real positivo r expresado en forma binaria

$$r = r_0 \, , \, e_1 \, e_2 \, \ldots \, e_n \, \ldots$$

(donde cada e_i designa la cifra 0 ó 1).

Demostraremos enseguida que $r^2 = a$

2° *Construcción del número* r

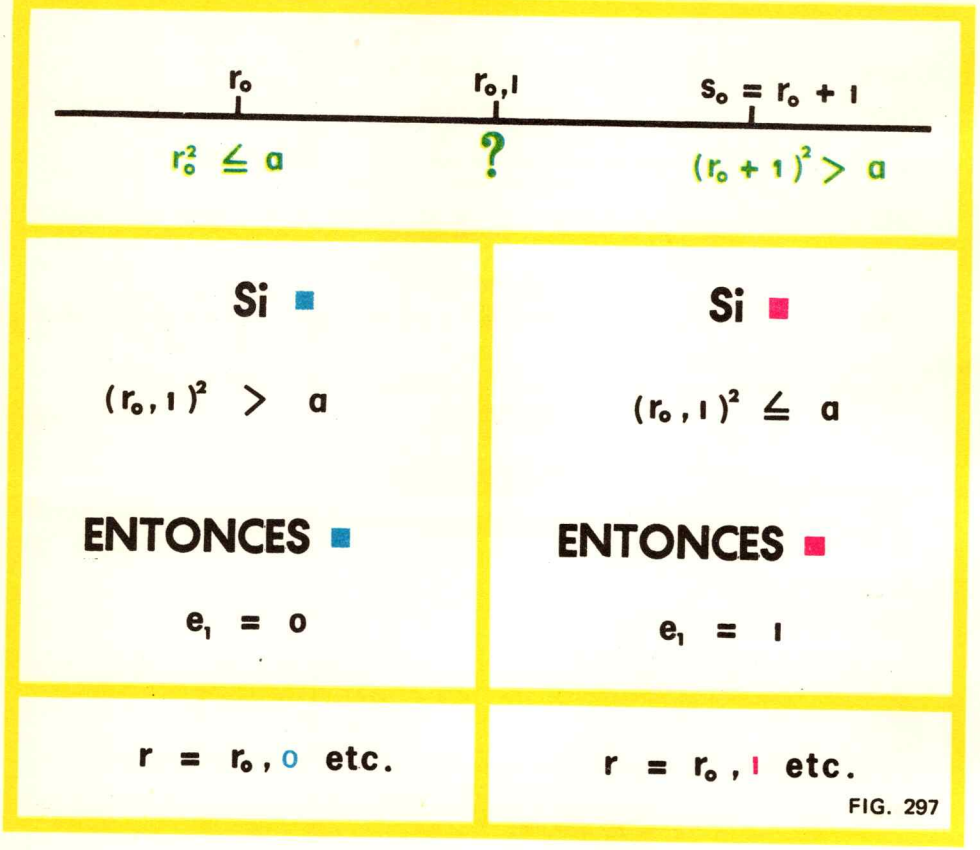


FIG. 297

Acabamos de determinar e_1 y por tanto los números

$r_1 = r_0 , e_1$ $\qquad$ $s_1 = r_1 + 0,1$

Según los casos :

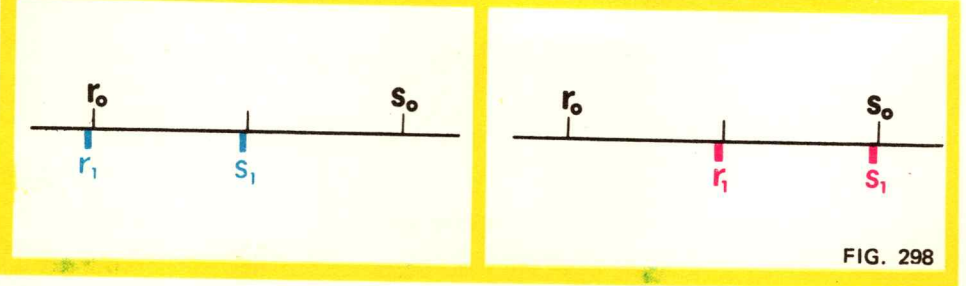


FIG. 298

En todos los casos :

$$r_0 \leqslant r_1 < s_1 \leqslant s_0$$

$$r_1^2 \leqslant a < s_1^2$$

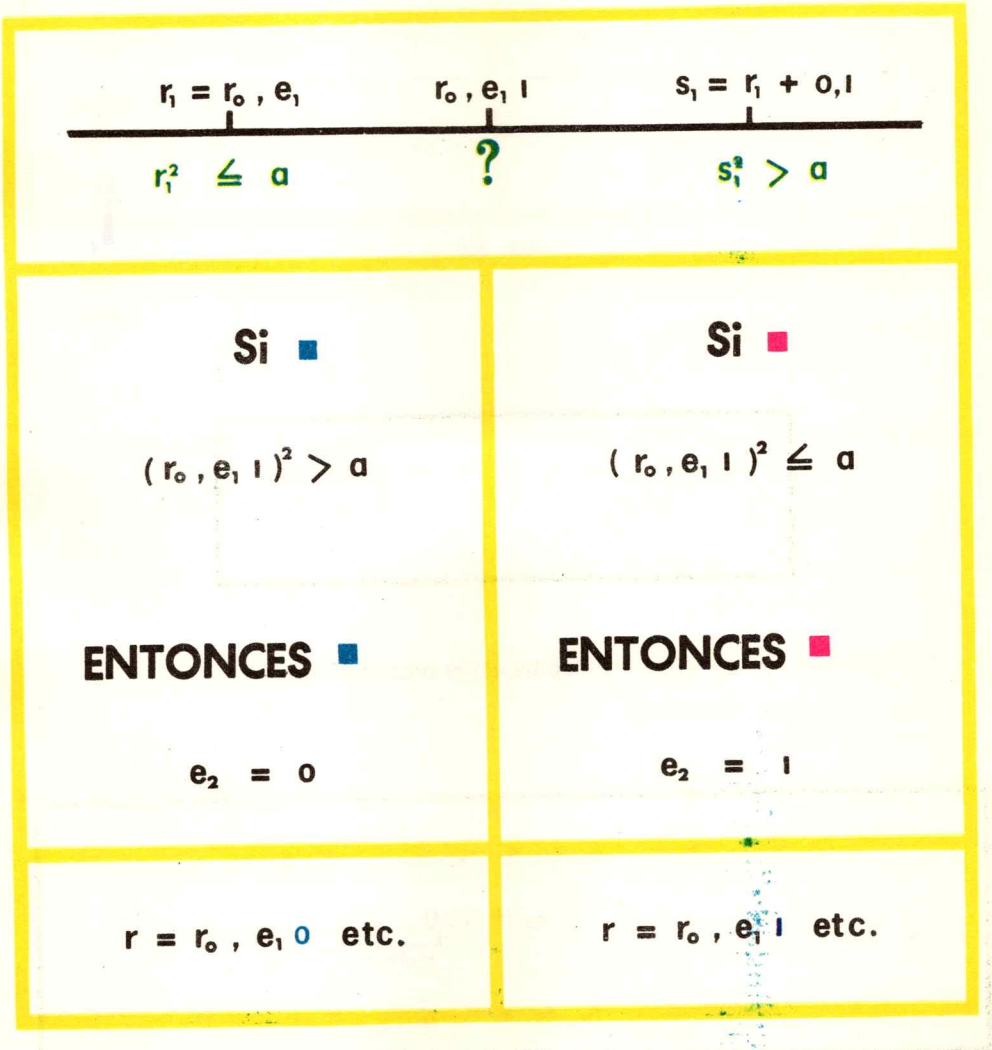


FIG. 299

Acabamos de determinar e_2 y por tanto los números

$$r_2 = r_0 , e_1 e_2 \qquad s_2 = r_2 + 0{,}01$$

Según los casos :

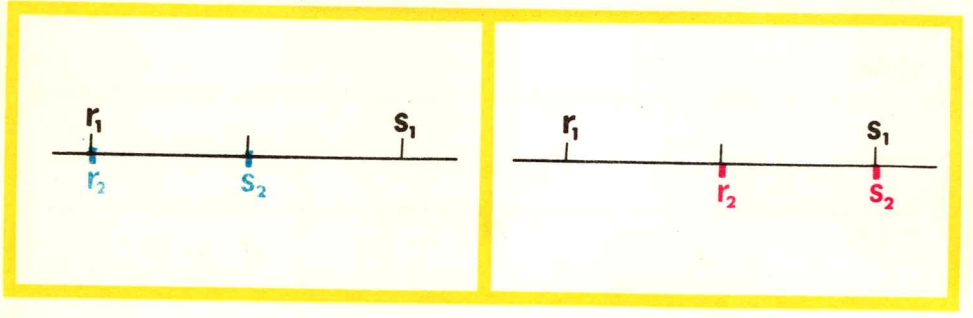


FIG. 300

En todos los casos :

$$r_0 \leqslant r_1 \leqslant r_2 < s_2 \leqslant s_1 \leqslant s_0$$

$$r_2^2 \leqslant a < s_2^2$$

Calcularemos $e_3 , e_4 , \ldots$ repitiendo el procedimiento.
Y en la nª etapa tendremos :

$$r_0 \leqslant r_1 \leqslant \ldots \leqslant r_n < s_n \leqslant \ldots \leqslant s_1 \leqslant s_0$$

$$s_n = r_n + 0 , \underbrace{0 \ldots 1}_{\text{n cifras}}$$

$$r_n^2 \leqslant a < s_n^2$$

3° Acabamos de construir $r = r_0 , e_1 e_2 \ldots e_n \ldots$

Probemos que

$$r^2 = a$$

DEMOSTRACION :

Efectuemos primero un simple cálculo preliminar que será de utilidad para la demostración.

Llamemos k al número de cifras binarias del natural s_0

$$s_0 < 10^k$$

$$s_n < 10^k$$

$$r_n < 10^k$$

$$s_n + r_n < 10^{k+1}$$

Recordemos que $s_n - r_n = 10^{-n}$

Por tanto $s_n^2 - r_n^2 < 10^{k+1-n}$

La construcción de r implica

$$r_n \leqslant r \leqslant s_n$$

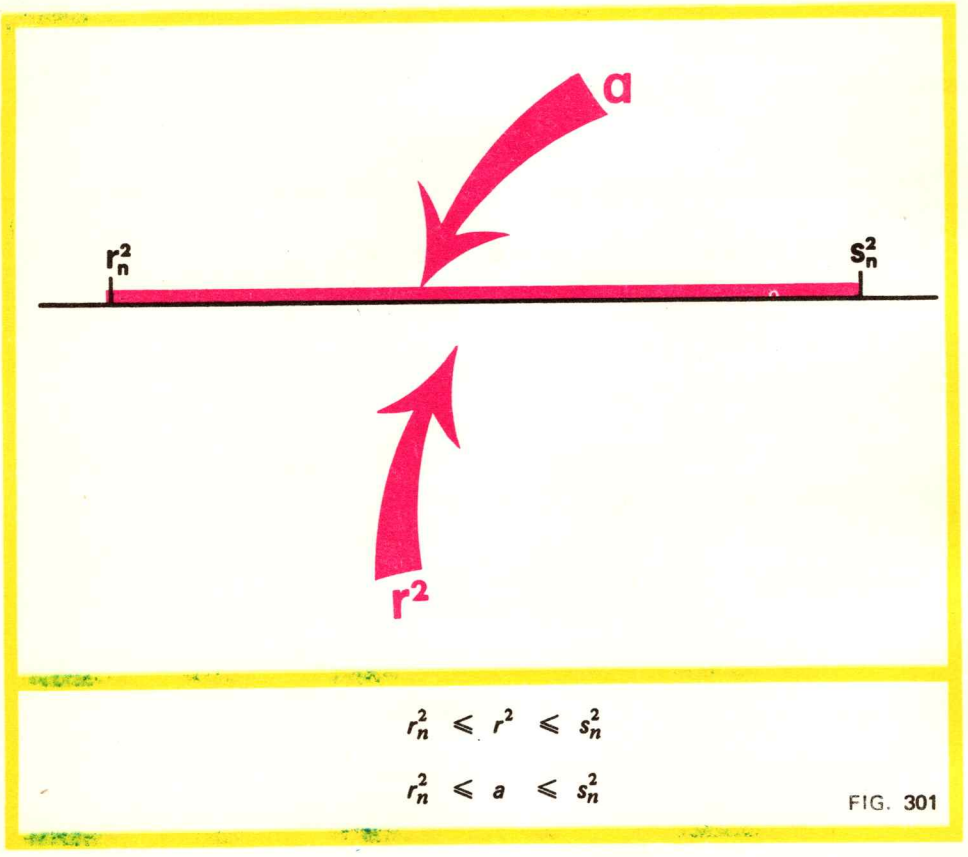
$$r_n^2 \leqslant r^2 \leqslant s_n^2$$

Se había obtenido por otra parte

$$r_n^2 \leqslant a < s_n^2$$

de donde

$$r_n^2 \leqslant a \leqslant s_n^2$$



$$r_n^2 \leqslant r^2 \leqslant s_n^2$$

$$r_n^2 \leqslant a \leqslant s_n^2$$

FIG. 301

De aquí $\quad |a - r^2| \leqslant s_n^2 - r_n^2$

y, teniendo en cuenta el cálculo preliminar :

$$\forall\, n \in \omega \quad : \quad |a - r^2| \leqslant 10^{k+1-n}$$

Para $n = k + 1$: $|a - r^2| \leqslant 1$

$n = k + 2$: $|a - r^2| \leqslant 0{,}1$

$n = k + 3$: $|a - r^2| \leqslant 0{,}01$

$n = k + 4$: $|a - r^2| \leqslant 0{,}001$

etc. . . .

Luego $|a - r^2| = 0$

$a - r^2 = 0$

$$\boldsymbol{a = r^2}$$

l.q.q.d.

DEFINICION — *El número* r_n *se denomina raíz cuadrada de* a *, por defecto, con error menor que* 10^{-n}

EJERCICIOS

1. $\sqrt{676} = 26$

2. $\sqrt{26^2} = 26$

3. $\sqrt{(-26)^2} = \sqrt{26^2} = 26$

6. Para todo $r \in \mathbf{R}$: $\sqrt{r^2} = |r|$

5. En binario :

Calcula $\sqrt{10}$ por defecto con error menor que 0,00001.

$1^2 \leqslant 10 < 10^2$		$r_0 = 1$	$s_0 = 10$
$(1,1)^2 = 10,01 > 10$		$r_1 = 1,0$	$s_1 = 1,1$
$(1,01)^2 = 1,1001 < 10$		$r_2 = 1,01$	$s_2 = 1,10$
$(1,011)^2 = 1,111001 < 10$		$r_3 = 1,011$	$s_3 = 1,100$
$(1,0111)^2 = 10,00010001 > 10$		$r_4 = 1,0110$	$s_4 = 1,0111$
$(1,01101)^2 = 1,111101001 < 10$		$r_5 = 1,01101$	$s_5 = 1,01110$

$$\sqrt{10} = 1,01101 \text{ etc.}$$

6. En sistema decimal :

Calcula $\sqrt{3}$ por defecto con error menor que 0,01.

$1^2 < 3 < 2^2$ $r_0 = 1$ $s_0 = 2$

$1,5^2 = 2,25$

$1,6^2 = 2,56$

$1,7^2 = 2,89$

$1,8^2 = 3,24$

$1,7^2 < 3 < 1,8$ $r_1 = 1,7$ $s_1 = 1,8$

$1,75^2 = 3,0625$

$1,74^2 = 3,0276$

$1,73^2 = 2,9919$

$1,73^2 < 3 < 1,74^2$ $r_2 = 1,73$ $s_2 = 1,74$

$$\sqrt{3} = 1,73 \text{ etc.}$$

2 – MULTIPLICACION Y ORDEN

PROPOSICION – *La raíz cuadrada es un isomorfismo creciente del grupo ordenado* $\mathbf{R}_0^+ , \cdot , \leqslant$ *sobre sí mismo.*

DEMOSTRACION :

En el § 1 hemos visto que la aplicación $\mathbf{R}_0^+ \to \mathbf{R}_0^+ : r \to r^2$ es estrictamente **creciente** y por tanto **inyectiva.**

El teorema del párrafo precedente establece su **suryectividad.**

La aplicación $\mathbf{R}_0^+ \to \mathbf{R}_0^+ : r \to r^2$ es, por tanto, una **permutación creciente** de $\mathbf{R}_0^+ , \leqslant$

Sucede lo mismo con la permutación recíproca $\mathbf{R}_0^+ \to \mathbf{R}_0^+ : r \to \sqrt{r}$

Sabemos desde hace tiempo que el cuadrado $\mathbf{R}_0^+ \to \mathbf{R}_0^+ : r \to r^2$ es un isomorfismo del grupo $\mathbf{R}_0^+ , \cdot$ sobre sí mismo, puesto que

$$\forall x , y \in \mathbf{R}_0^+ : \qquad (x \cdot y)^2 = x^2 \cdot y^2$$

Lo mismo acontece con la permutación recíproca

$$\forall x , y \in \mathbf{R}_0^+ : \qquad \sqrt{x \cdot y} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$$

l.q.q.d.

Podemos generalizar :

$$\forall x , y \in \mathbf{R}_0^+ : \qquad \sqrt{x \cdot y} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$$

Para todo $x \in \mathbf{R}^+$ y para todo $y \in \mathbf{R}_0^+$:

$$\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} \right)^2 = \frac{(\sqrt{x})^2}{(\sqrt{y})^2} = \frac{x}{y}$$

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\frac{x}{y}}$$

$$\forall x , y \in \mathbf{R}^+ : \quad \sqrt{x \cdot y} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$$

$$\forall x \in \mathbf{R}^+ , \quad y \in \mathbf{R}_0^+ : \quad \sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$$

EJERCICIOS

Las letras designan reales positivos

1. $\sqrt{49} = 7$

$\sqrt{4900} = 70$

$\sqrt{0{,}49} = 0{,}7$

$\sqrt{0{,}0049} = 0{,}07$

5. Calcula $\sqrt{4{,}9}$ por defecto con error menor que 0,1.

$\sqrt{a^2\,b} = a\sqrt{b}$

$\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$\sqrt{75} = 5\sqrt{3}$

$\sqrt{a^3} = a\sqrt{a}$

10. $\sqrt{a^9} = a^4\sqrt{a}$

$\sqrt{32\,a^{15}} = 4\,a^7\sqrt{2\,a}$

$\sqrt{a^6\,b^3\,c^9} = a^3\,b\,c^4\sqrt{b\,c}$

$\sqrt{a^{2n}\,b^{2m+1}} = a^n\,b^m\sqrt{b}$

$\sqrt{8\,b^{2p+3}} = 2\,b^{p+1}\sqrt{2\,b}$

15, $\sqrt{a^2 + 2\,a\,b + b^2} = a + b$

$\sqrt{a^2 - 2\,a\,b + b^2} = |a - b|$

$\sqrt{a^2\,b - 2\,a\,b^2 + b^3} = |a - b|\sqrt{b}$

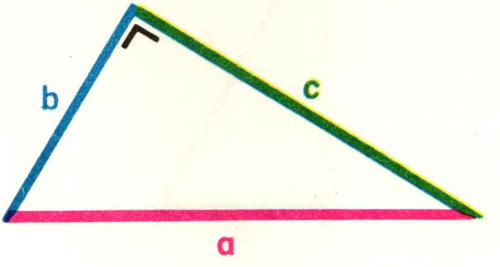
Si $x, y \in \mathbf{R}_0^+$, **Entonces** $m\sqrt{x^2 + y^2} < x + y$

$$\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

20. $$\sqrt{\frac{2}{a^3\,b}} = \frac{\sqrt{2\,a\,b}}{a^2\,b}$$

3 — EJERCICIOS

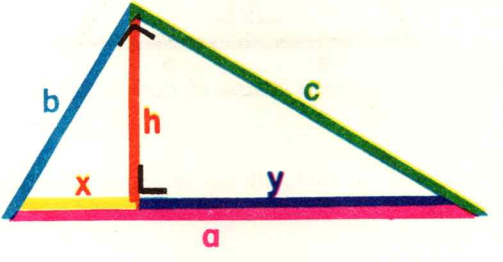
1.



$$a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

FIG. 302

2.



$$h = \sqrt{x \cdot y}$$

$$b = \sqrt{a \cdot x}$$

$$c = \sqrt{a \cdot y}$$

FIG. 303

3.

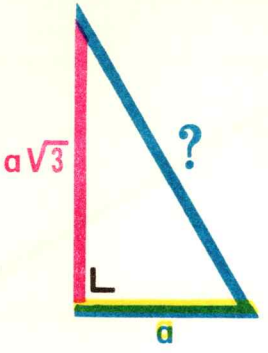


FIG. 304

4.

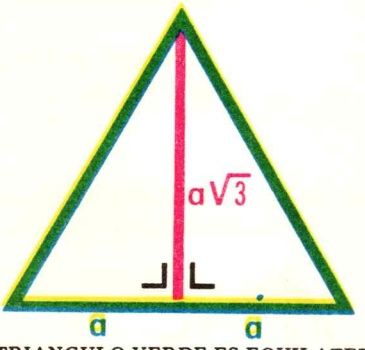


FIG. 305

EL TRIANGULO VERDE ES EQUILATERO

5. Para todo $r \in \mathbf{R}_0^+$, existe un triángulo equilátero del cual r es la longitud de sus lados.

6.

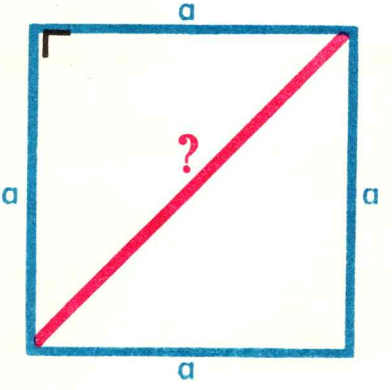


FIG. 306

7.

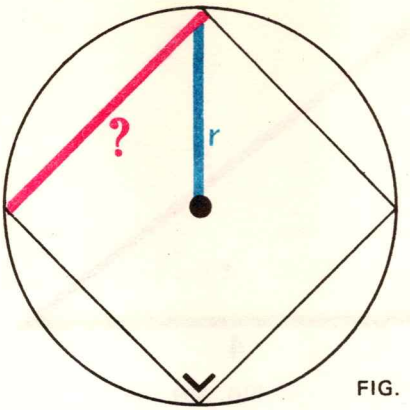
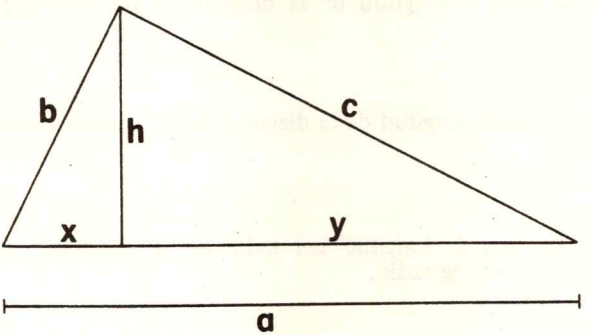


FIG. 307

8.



$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{h^2 + x^2} = \sqrt{a\,x}$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{h^2 + y^2} = \sqrt{a\,y}$$

$$b\,c = a\,h$$

FIG. 308

9.

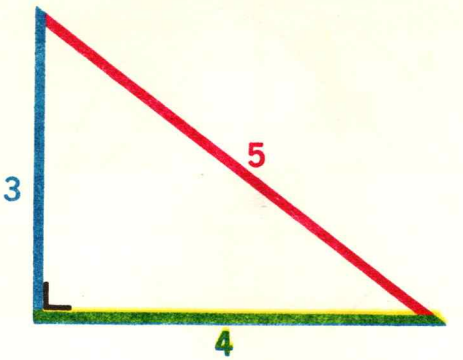


FIG. 309

10. Calcula, hasta los mm, la longitud de la diagonal de un rectángulo cuyos lados miden 4 cm y 7 cm.

11. Calcula, hasta los cm, la longitud de la diagonal de un cuadrado cuyo lado mide 3 m.

12. Calcula, hasta los mm, la longitud del lado de un cuadrado inscrito en una circunferencia de 50 cm de radio.

13. Calcula, hasta los cm, la altura de un triángulo equilátero cuyo lado mide 1 m.

14. Calcula, hasta los cm, la diagonal de un cubo cuyo lado mide 1 m.

4 – CALCULO PRACTICO DE LA RAIZ CUADRADA

El método del § 1 que establece la existencia de la raíz cuadrada de todo $a \in \mathbf{R}_0^+$ permite calcular tantas cifras binarias de $\sqrt{a}$ como se deseen.

Las grandes máquinas electrónicas proceden de manera diferente y calculan las raíces cuadradas aproximadas sucesivas por una sucesión de divisiones y de cálculo de mitades. Vamos a revelarte este secreto.

Primera aproximación de $\sqrt{a}$ por exceso

Es fácil hallar un número $s_0 \geqslant \sqrt{a}$
(lo cual equivale a $s_0^2 \geqslant a$)

En este cálculo,

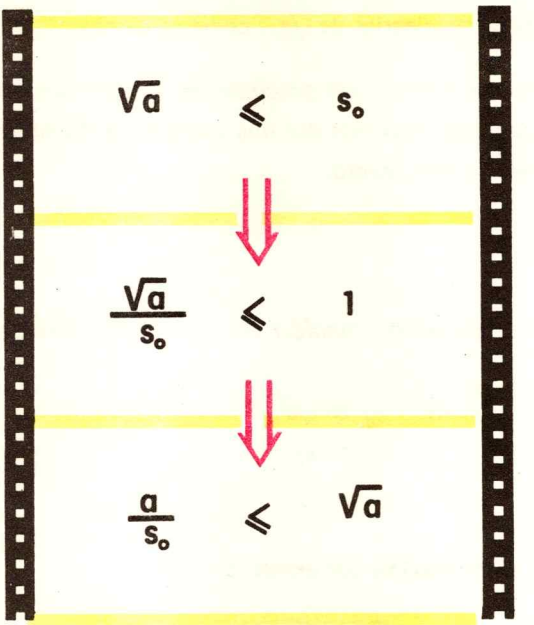
s_0 es la **primera aproximación por exceso de $\sqrt{a}$**

$$\sqrt{a} \leqslant s_0$$

La elección de la primera aproximación por exceso de $\sqrt{a}$ es muy arbitraria.

¿No es extraño que un método de cálculo de $\sqrt{a}$ se inicie de esta manera?

Primera aproximación por defecto de $\sqrt{a}$



Pongamos entonces

$$r_0 = \frac{a}{s_0}$$

Luego

$$r_0 \leqslant \sqrt{a} \leqslant s_0$$

En este cálculo

r_0 es la **primera aproximación por defecto de** $\sqrt{a}$

Segunda aproximación por exceso de $\sqrt{a}$

La **media aritmética**

$$s_1 = \frac{1}{2}(s_0 + r_0)$$

de los números s_0 y r_0 pertenece al segmento $[r_0 ; s_0]$

$$r_0 \leqslant s_1 \leqslant s_0$$

Y además,

$$s_1 = \frac{1}{2}(s_0 + r_0)$$

$$= \frac{1}{2}\left(s_0 + \frac{a}{s_0}\right)$$

$$= \frac{s_0^2 + a}{2\, s_0}$$

¡Justifica!

$$= \frac{s_0^2 + a - 2\, s_0 \sqrt{a} + 2\, s_0 \sqrt{a}}{2\, s_0}$$

$$= \frac{(s_0 - \sqrt{a})^2}{2\, s_0} + \sqrt{a} \geqslant \sqrt{a}$$

Luego

$$r_0 \leqslant \sqrt{a} \leqslant s_1 \leqslant s_0 .$$

En este cálculo,

s_1 es la **segunda aproximación por exceso de** $\sqrt{a}$

Repitamos a partir de s_1 el proceso descripto más arriba a partir de s_0

Segunda aproximación por defecto de $\sqrt{a}$

Pongamos $$r_1 = \frac{a}{s_1}$$

Como antes : $$\sqrt{a} \leqslant s_1 \Longrightarrow r_1 \leqslant \sqrt{a}$$

Además $$s_1 \leqslant s_0 \Longrightarrow \frac{a}{s_0} \leqslant \frac{a}{s_1}$$

$$\Longrightarrow r_0 \leqslant r_1$$

Por tanto $$r_0 \leqslant r_1 \leqslant \sqrt{a} \leqslant s_1 \leqslant s_0$$

Precisemos este resultado probando

$$s_1 - r_1 \leqslant \frac{1}{2}(s_0 - r_0)$$

DEMOSTRACION :

$$s_1 - r_1 = \frac{1}{2}(s_0 + r_0) - \frac{a}{s_1}$$

$$= \frac{1}{2}(s_0 + r_0) - \frac{2\,a}{s_0 + r_0}$$

$$= \frac{1}{2}(s_0 + r_0) - \frac{2\,r_0\,s_0}{s_0 + r_0}$$

$$= \frac{(s_0 + r_0)^2 - 4\,r_0\,s_0}{2\,(s_0 + r_0)}$$

¡Justifica!

$$= \frac{1}{2}\,\frac{(s_0 - r_0)^2}{s_0 + r_0}$$

$$= \frac{s_0 - r_0}{s_0 + r_0} \qquad \frac{1}{2}(s_0 - r_0) \leqslant \frac{1}{2}(s_0 - r_0)$$

l.q.q.d.

¡Recapitulemos!

ETAPA **0**

$$\sqrt{a} \leqslant s_0$$

$$r_0 = \frac{a}{s_0} \qquad r_0 \leqslant \sqrt{a} \leqslant s_0$$

Pongamos $e = s_0 - r_0$

r_0 es valor aproximado de $\sqrt{a}$ por defecto, con error menor o igual a e.

s_0 es valor aproximado de $\sqrt{a}$ por exceso, con error menor o igual a e.

ETAPA **1**

$$s_1 = \frac{1}{2}(s_0 + r_0) \qquad r_1 = \frac{a}{s_1}$$

$$r_0 \leqslant r_1 \leqslant \sqrt{a} \leqslant s_1 \leqslant s_0$$

$$s_1 - r_1 \leqslant \frac{1}{2} e$$

r_1 es valor aproximado de $\sqrt{a}$ por defecto, con error menor o igual a $\frac{e}{2}$

s_1 es valor aproximado de $\sqrt{a}$ por exceso, con error menor o igual a $\frac{e}{2}$

¡Repitamos el procedimiento!

ETAPA **2**

$$s_2 = \frac{1}{2}(s_1 + r_1) \qquad r_2 = \frac{a}{s_2}$$

$$r_0 \leqslant r_1 \leqslant \boxed{r_2 \leqslant \sqrt{a} \leqslant s_2} \leqslant s_1 \leqslant s_0$$

$$s_2 - r_2 \leqslant \frac{1}{2}(s_1 - r_1) \leqslant \frac{1}{4} \cdot e$$

r_2 **es valor aproximado de** $\sqrt{a}$ **por defecto, con error menor o igual a** $\frac{e}{4}$

s_2 **es valor aproximado de** $\sqrt{a}$ **por exceso, con error menor o igual a** $\frac{e}{4}$

. . . etc. . . . etc. . . . etc.

¡Prosigamos!

ETAPA **n**

$$s_n = \frac{1}{2}(s_{n-1} + r_{n-1}) \qquad r_n = \frac{a}{s_n}$$

$$r_0 \leqslant r_1 \leqslant r_2 \leqslant \ldots \leqslant r_{n-1} \leqslant \boxed{r_n \leqslant \sqrt{a} \leqslant s_n} \leqslant s_{n-1} \leqslant \ldots \leqslant s_2 \leqslant s_1 \leqslant s_0$$

$$s_n - r_n \leqslant \frac{e}{2^n}$$

r_n es valor aproximado de $\sqrt{a}$ por defecto, con error menor o igual a $\frac{e}{2^n}$

s_n es valor aproximado de $\sqrt{a}$ por exceso, con error menor o igual a $\frac{e}{2^n}$

Los ejemplos numéricos te enseñarán que la aproximación para r_n y s_n es, en general, mucho mejor que $\frac{e}{2^n}$

Cálculo numérico de la raíz cuadrada de *a*

$$r_0 = \frac{a}{s_0} \qquad s_0 > \sqrt{a}$$

$$r_1 = \frac{a}{s_1} \qquad s_1 = \frac{1}{2}(r_0 + s_0)$$

$$r_2 = \frac{a}{s_2} \qquad s_2 = \frac{1}{2}(r_1 + s_1)$$

$$r_3 = \frac{a}{s_3} \qquad s_3 = \frac{1}{2}(r_2 + s_2)$$

etc....

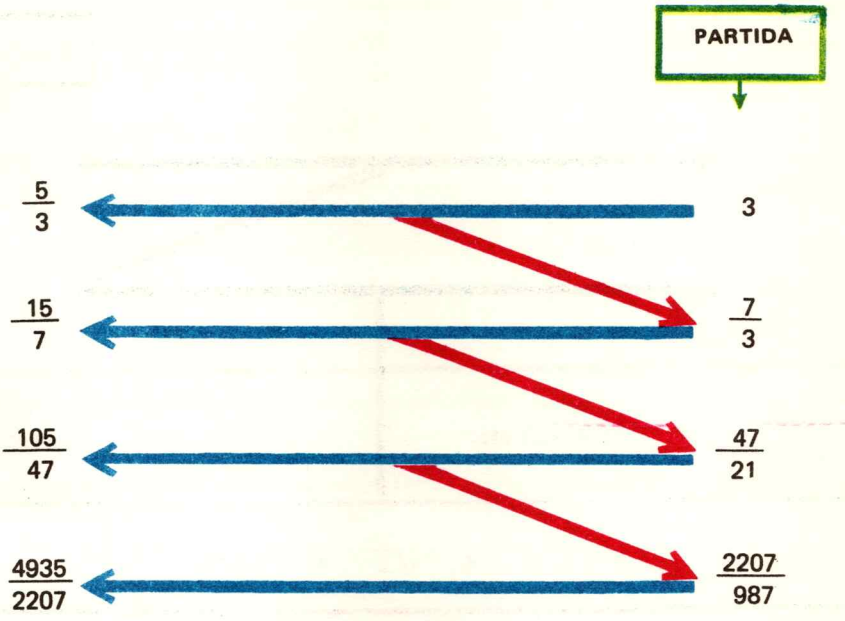
5 – CALCULO NUMERICO

Calculemos el conjunto $\sqrt{5}$

Veamos lo que obtenemos haciendo

$$s_0 = 3$$

y deteniéndonos a la 3ª etapa.



$\frac{4935}{2207} = 2{,}2360670$ etc. | $\frac{2207}{987} = 2{,}2360688$ etc.

Luego $2{,}23606 \leqslant \sqrt{a} \leqslant 2{,}23607$

Y aún podemos precisar : $\sqrt{a} = 2{,}236067$ etc. o $\sqrt{a} = 2{,}236068$ etc.

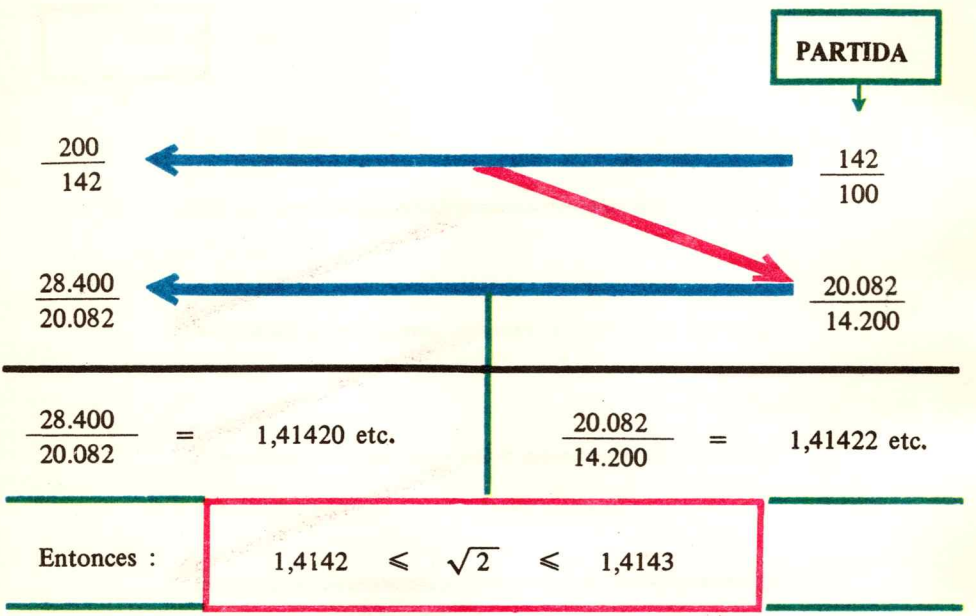
EJERCICIOS

1. El método del cálculo numérico de la raíz cuadrada que acabamos de exponer conviene perfectamente para mejorar lo más posible los resultados hallados en las tablas de raíces cuadradas.

Una tabla muy rudimentaria nos indica que

1,41 es la raíz cuadrada de 2
por defecto, con menor error que 0,01.

Se puede tomar entonces $s_0 = 1{,}42 = \frac{142}{100}$



Se puede igualmente precisar : $\sqrt{2} = 1{,}41420$ etc. o

$\sqrt{2} = 1{,}41421$ etc. o $\sqrt{2} = 1{,}41422$ etc.

2. Debo calcular la raíz cuadrada de $a \in \mathbf{R}_0^+$

Según el cálculo de la primera aproximación por exceso, $s_0 = \sqrt{a}$

¿Cuáles serán los valores de $r_0 , r_1 , r_2 , \ldots , r_n , \ldots$

$s_1 , s_2 , \ldots , s_n , \ldots$?

3. Observa la sucesión de números siguientes: :

$$
\begin{aligned}
d_1 &= 1 \\
d_2 &= 3 \\
d_3 &= 7 \\
d_4 &= 15 \\
d_5 &= 31 \\
d_6 &= 63 \\
d_7 &= 127 \\
d_8 &= 255 \\
d_9 &= 511 \\
d_{10} &= 1023 \\
d_{11} &= 2047
\end{aligned}
$$

¿Qué te sugiere?

Da diversas respuestas antes de leer las que siguen.

He aquí tres respuestas :

$$
\begin{aligned}
d_1 &= 1 = 2^1 - 1 = 1 = 1 \\
d_2 &= 3 = 2^2 - 1 = 1 + 2^1 = 2 \times 1 + 1 \\
d_3 &= 7 = 2^3 - 1 = 3 + 2^2 = 2 \times 3 + 1 \\
d_4 &= 15 = 2^4 - 1 = 7 + 2^3 = 2 \times 7 + 1 \\
d_5 &= 31 = 2^5 - 1 = 15 + 2^4 = 2 \times 15 + 1 \\
d_6 &= 63 = 2^6 - 1 = 31 + 2^5 = 2 \times 31 + 1 \\
d_7 &= 127 = 2^7 - 1 = 63 + 2^6 = 2 \times 63 + 1 \\
d_8 &= 255 = 2^8 - 1 = 127 + 2^7 = 2 \times 127 + 1 \\
d_9 &= 511 = 2^9 - 1 = 255 + 2^8 = 2 \times 255 + 1 \\
d_{10} &= 1023 = 2^{10} - 1 = 511 + 2^9 = 2 \times 511 + 1 \\
d_{11} &= 2047 = 2^{11} - 1 = 1023 + 2^{10} = 2 \times 1023 + 1
\end{aligned}
$$

4. Formula las respuestas del ejercicio precedente

$$\forall\ n \in \omega_0 \quad : \quad d_n = 2^n - 1$$

$$d_1 = 1 \quad \text{y} \quad \forall\ n \in \omega_0 \quad d_{n+1} = d_n + 2^n$$

$$d_1 = 1 \quad \text{y} \quad \forall\ n \in \omega_0 \quad : \quad d_{n+1} = 2 \cdot d_n + 1$$

La fórmula roja proporciona directamente d_n para todo $n \in \omega_0$

La verde y la azul dan el primer término de la sucesión y proporcionan un medio para calcular cualquier otro término a partir del precedente.

Se expresa este hecho diciendo que *la fórmula verde y la fórmula azul definen la sucesión por* **recurrencia** (*o por* **inducción**).

5. En los ejercicios 3 y 4, se ha observado una situación.

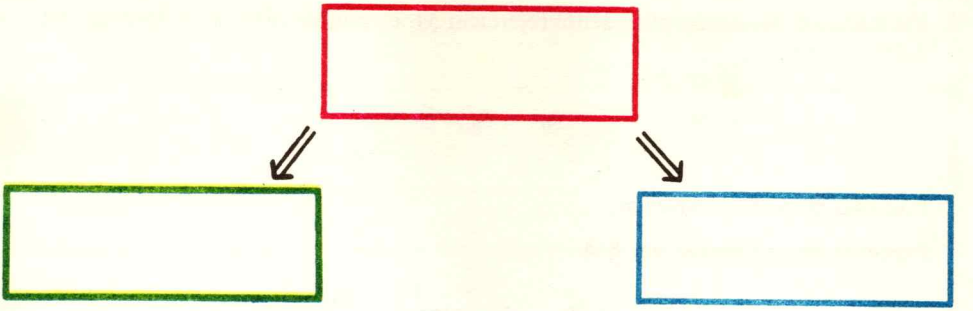
Es el momento de probar.

Antes de probar, debemos definir.

Pues hasta ahora la sucesión $d_1 , d_2 , \ldots , d_n , \ldots$ no ha sido definida formalmente.

Tomemos la fórmula roja como definición de la sucesión d_n

Probemos que la fórmula roja implica la verde y la azul.



$$\square \Longrightarrow \quad d_1 = 2^1 - 1 = 1$$

$$\square \Longrightarrow \quad d_{n+1} = 2^{n+1} - 1$$

$$= 2^{n+1} - 1^{n+1}$$

$$= (2 - 1)\,(1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n)$$

$$= 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n$$

$$d_n = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1}$$

$$d_{n+1} = d_n + 2^n \qquad \blacksquare$$

$$\square \Longrightarrow \quad d_n = 2^n - 1$$

$$2\,d_n + 1 = 2\,(2^n - 1) + 1$$

$$= 2^{n+1} - 2 + 1$$

$$= 2^{n+1} - 1 = d_{n+1} \qquad \blacksquare$$

6. **Si** la sucesión $d_1 , d_2 , \ldots , d_n , d_{n+1} , \ldots$
queda definida por $d_1 = 1$
$\forall\, n \in \omega_0 \quad : \quad d_{n+1} = 2\,d_n + 1$

Entonces $\forall\, n \in \omega_0 \quad : \quad d_n = 2^n - 1$

7. Utilizando el resultado precedente (ejercicio 5), es posible mejorar la fórmula del §4 y probar que

$$n \in \omega_0 \quad : \quad s_n - r_n \leqslant \frac{e^{(2^n)}}{(4\,r_0)^{(2^n - 1)}}$$

Esquema de la demostración.

Partamos de la fórmula del § 4

$$s_1 - r_1 \leqslant \frac{(s_0 - r_0)^2}{2\,(s_0 + r_0)}$$

o también $$s_1 - r_1 \leqslant \frac{e^2}{2\,(s_0 + r_0)} \qquad \text{(poniendo } e = s_0 - r_0\text{)}$$

Como $r_0 \leqslant s_0$, reforzaremos la desigualdad si sustituimos s_0 por r_0

$$s_1 - r_1 \leqslant \frac{e^2}{4\,r_0} \tag{1}$$

$$s_2 - r_2 \leqslant \frac{(s_1 - r_1)^2}{2\,(s_1 + r_1)} \underset{(1)}{\leqslant} \frac{\frac{e^2}{4r_0}}{2\,(s_1 + r_1)}$$

Como $r_0 \leqslant r_1 \leqslant s_1$, reforzaremos la desigualdad reemplazando s_1 y r_1 por r_0

$$s_2 - r_2 \leqslant \frac{\frac{e^2}{4r_0}}{4r_0} \qquad s_2 - r_2 \leqslant \frac{e^{(2^2)}}{(4r_0)^3}$$

Continuamos en igual forma

$$s_3 - r_3 \leqslant \frac{\left(\frac{e^{(2^2)}}{(4r_0)^3}\right)^2}{4r_0} \qquad s_3 - r_3 \leqslant \frac{e^{(2^3)}}{(4r_0)^{2\times 3+1}}$$

Teniendo en cuenta el ejercicio 5, obtenemos finalmente

$$s_n - r_n \leqslant \frac{e^{(2^n)}}{(4r_0)^{(2n-1)}}$$

8. La fórmula del ejercicio precedente prueba que hemos hallado un excelente método para calcular la raíz cuadrada.

6 – ECUACION DE SEGUNDO GRADO

EJERCICIOS

Tenemos $a \in \mathbf{R}^+$, $b \in \mathbf{R}_0^+$, $c \in \mathbf{R}$, $d \in \mathbf{R}_0$

1. $\{ x \in \mathbf{R} \mid x^2 = 9 \} = \{ 3 , -3 \}$

2. $\{ x \in \mathbf{R} \mid x^2 = 0 \} = \{ 0 \}$

3. $\{ x \in \mathbf{R} \mid x^2 = -9 \} = \phi$

4. $\{ x \in \mathbf{R} \mid x^2 = 3 \} = \{ \sqrt{3} , -\sqrt{3} \}$

5. $\{ x \in \mathbf{R} \mid x^2 = -3 \} = \phi$

6. $\{ x \in \mathbf{R} \mid x^2 = a \} = \{ \sqrt{a} , -\sqrt{a} \}$

7. $\{ x \in \mathbf{R} \mid x^2 = -b \} = \phi$

8. $\{ x \in \mathbf{R} \mid (x+c)^2 = a \} = \{ -c+\sqrt{a} , -c-\sqrt{a} \}$

9. $\{ x \in \mathbf{R} \mid (x+c)^2 = -b \} = \phi$

10. $\{ x \in \mathbf{R} \mid (dx+c)^2 = a \} = \left\{ \frac{-c+\sqrt{a}}{d} , \frac{-c-\sqrt{a}}{d} \right\}$

Problema $a \in \mathbf{R}_0 \; ; \; b \, , c \in \mathbf{R}$

$$\{ x \in \mathbf{R} \mid a x^2 + b x + c = 0 \} = ?$$

DEFINICION

$\{ x \in \mathbf{R} \mid a x^2 + b x + c = 0 \}$ *es el conjunto de las*

raíces reales

de la ecuación $a x^2 + b x + c = 0$

Solución :

$$\{ x \in \mathbf{R} \mid a x^2 + b x + c = 0 \}$$

$$= \left\{ x \in \mathbf{R} \mid a \left(x^2 + \frac{b}{a} x + \frac{c}{a} \right) = 0 \right\}$$

$$= \left\{ x \in \mathbf{R} \mid x^2 + \frac{b}{a} x + \frac{c}{a} = 0 \right\} \qquad \text{(pues } a \neq 0\text{)}$$

$$= \left\{ x \in \mathbf{R} \mid x^2 + 2 \frac{b}{2a} x + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0 \right\}$$

$$= \left\{ x \in \mathbf{R} \mid \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \right\}$$

$$= \left\{ x \in \mathbf{R} \mid \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right\}$$

Si $b^2 - 4ac < 0$

Entonces $\left\{ x \in R \;\middle|\; \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right\} = \phi$

Por tanto $\{ x \in R \;|\; a x^2 + b x + c = 0 \} = \phi$

Si $b^2 - 4ac \geqslant 0$

Entonces $\left\{ x \in R \;\middle|\; \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right\}$

$$= \left\{ x \in R \;\middle|\; x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ ó } x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right\}$$

$$= \left\{ x \in R \;\middle|\; x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ ó } x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right\}$$

$$= \left\{ \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} , \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right\}$$

Por tanto

$$\{ x \in R \;|\; a x^2 + b x + c = 0 \} = \left\{ \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} , \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right\}$$

El conjunto de raíces es un conjunto unitario

ssi $+ \sqrt{b^2 - 4ac} = - \sqrt{b^2 - 4ac}$

ssi $b^2 - 4ac = 0$

$a \in \mathbf{R}_0 \; ; \; b \; , \; c \in \mathbf{R}$

Ecuación	$a\,x^2 + b\,x + c = 0$		
$b^2 - 4\,a\,c < 0$	0	raíz	
$b^2 - 4\,a\,c = 0$	1	raíz	$-\dfrac{b}{2\,a}$
$b^2 - 4\,a\,c > 0$	2	raíces	$\dfrac{-\,b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}$

$$\{x \in \mathbf{R} \;\blacksquare\; a\,x^2 + b\,x + c = 0\} \neq \phi \iff b^2 - 4\,a\,c \geqslant 0$$

Si $b^2 - 4\,a\,c \geqslant 0$

Entonces, llamando $x' = \dfrac{-\,b + \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}$, $x'' = \dfrac{-\,b - \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}$

$$\{x \in \mathbf{R} \;\blacksquare\; a\,x^2 + b\,x + c = 0\} = \{x' \, , \, x''\}$$

$$x' = x'' \iff b^2 - 4\,a\,c = 0$$

Y así, en el caso $b^2 - 4\,a\,c = 0$, se dirá que la ecuación admite la raíz **doble** $x' = x'' = -\dfrac{b}{2\,a}$

EJERCICIOS

En la ecuación $a\,x^2 + b\,x + c = 0$

Se supone $a \neq 0$ y $b^2 - 4\,a\,c \geqslant 0$

Se tiene

$$x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}\,,\quad x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}$$

11. $x' + x'' = -\dfrac{b}{a}$

12. $x' \cdot x'' = \dfrac{c}{a}$

13. $\dfrac{1}{2}(x' + x'') = -\dfrac{b}{2a}$

14.
$$\begin{aligned} a\,x^2 + b\,x + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(x^2 - (x' + x'')\,x + x'\,x''\right) \\ &= a\,(x - x')\,(x - x'') \end{aligned}$$

15. **Si** $b^{2'} - 4\,a\,c = 0$

Entonces $a\,x^2 + b\,x + c = a\left(x - \dfrac{b}{2a}\right)^2 = \dfrac{(2\,a\,x - b)^2}{4\,a}$

16. ¿Cuál es el conjunto de raíces para cada una de las ecuaciones siguientes?

$x^2 - 5\,x + 6 = 0$ $\qquad$ $x^2 - 1 = 0$

$x^2 + x + 1 = 0$ $\qquad$ $x^2 + 1 = 0$

$x^2 - 2\,x + 1 = 0$ $\qquad$ $x^2 - 4 = 0$

$6\,x^2 - 5\,x + 1 = 0$ $\qquad$ $2\,x^2 - 1 = 0$

$4\,x^2 + 6\,x + 9 = 0$ $\qquad$ $x^2 + 3 = 0$

$x^2 + x - 1 = 0$ $\qquad$ $x^2 - 3 = 0$

$10\,x^2 - \dfrac{9}{2}x + \dfrac{1}{2} = 0$ $\qquad$ $2\,x^2 - 3 = 0$

17

Circunferencias y rectas

1 – CIRCUNFERENCIAS Y RECTAS

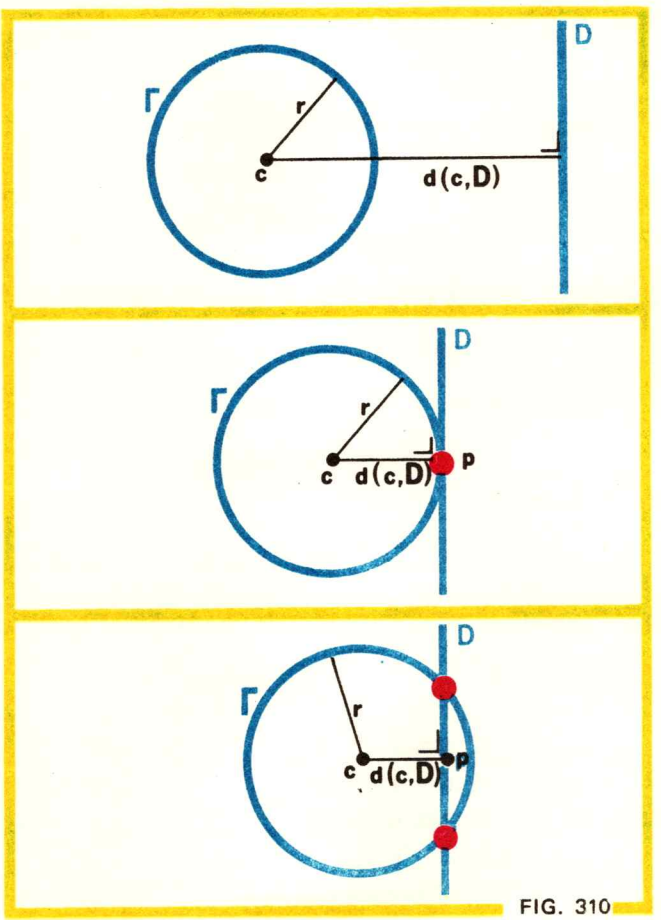


FIG. 310

TEOREMA

He aquí la recta D y una circunferencia $\Gamma\ (c\ ,\ r)$

$$\#(\Gamma \cap D) = 0 \iff r < d(c\ ,\ D)$$
$$\#(\Gamma \cap D) = 1 \iff r = d(c\ ,\ D)$$
$$\#(\Gamma \cap D) = 2 \iff r > d(c\ ,\ D)$$

Basta probar las tres implicaciones

1. $r < d(c\ ,\ D) \implies \#\ \Gamma \cap D = \phi$
2. $r = d(c\ ,\ D) \implies \#\ (\Gamma \cap D) = 1$
3. $r > d(c\ ,\ D) \implies \#\ (\Gamma \cap D) = 2$

Demostración de la primera implicación

He aquí $x \in D$

$d(c\ ,\ D)$ es la menor de las distancias desde c a los puntos de D

Por tanto

$$r < d(c\ ,\ D) \leqslant d(c\ ,\ x)$$
$$r < d(c\ ,\ x) \qquad \text{de donde} \quad x \notin \Gamma$$

Ningún punto de D pertenece a Γ : $\Gamma \cap D = \phi$

l.q.q.d.

Demostración de la segunda implicación

Si p designa a la proyección ortogonal de c sobre D

Entonces (12.6)

$$d(c\ ,\ p) = d(c\ ,\ D) = r$$
$$\forall x \in D \setminus \{p\} \ :\ d(c\ ,\ x) > d(c\ ,\ D) = r$$

Luego $p \in \Gamma$ y $x \notin \Gamma$ (para todo $x \in D \setminus \{p\}$)

O expresado de otro modo

$$\Gamma \cap D = \{p\}$$
$$\#(\Gamma \cap D) = 1$$

l.q.q.d.

Demostración de la tercera implicación

He aquí $x \in D$

Llamemos siempre p a la proyección ortogonal de c sobre D

Y hagamos

$$d = d(c, D) = d(c, p)$$

$$s = d(p, x)$$

Luego $d < r$ y $d^2 < r^2$

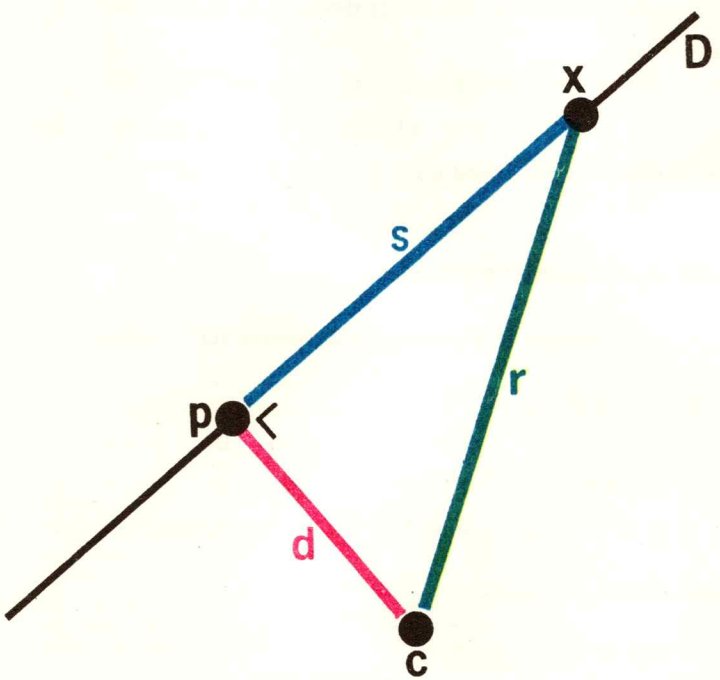
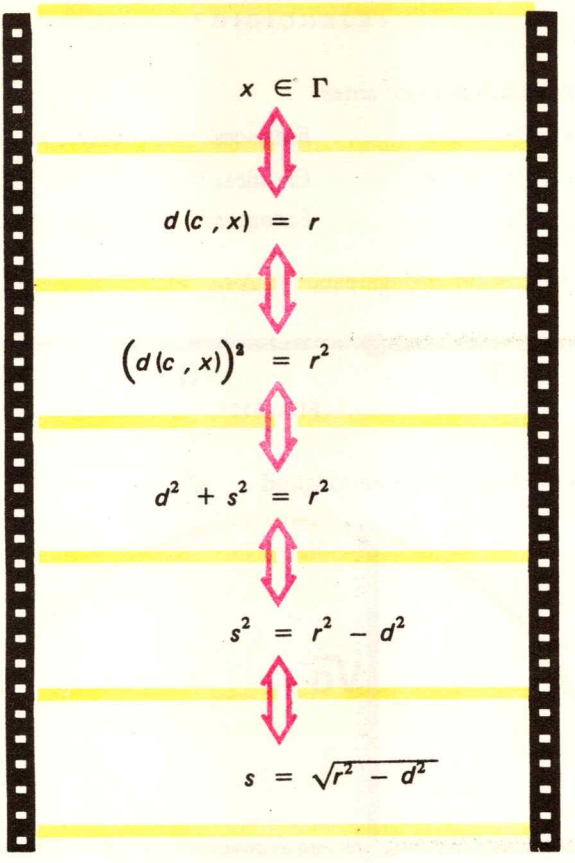


FIG. 311



Como $r^2 - d^2 > 0$, tendremos que $\sqrt{r^2 - d^2} > 0$

Llamemos a , b a los **dos** puntos de D cuya distancia a p sea igual a $\sqrt{r^2 - d^2}$

$$\Gamma \cap D = \{ a\ ,\ b \}$$

$$\# (\Gamma \cap D) = 2$$

l.q.q.d.

EJERCICIOS

1. Con las mismas notaciones que antes.

Si	$d(c, \mathrm{D}) > r$	Entonces	$\overline{\Delta}(c, r) \cap \mathrm{D} = \phi$
Si	$d(c, \mathrm{D}) = r$	Entonces	$\overline{\Delta}(c, r) \cap \mathrm{D} = p$
Si	$d(c, \mathrm{D}) < r$	Entonces	$\overline{\Delta}(c, r) \cap \mathrm{D} = [a, b]$

2. Enuncia una proposición análoga para $\Delta(c, r)$

3.

FIG. 312

Quieres construir un segmento de longitud $\sqrt{a}$

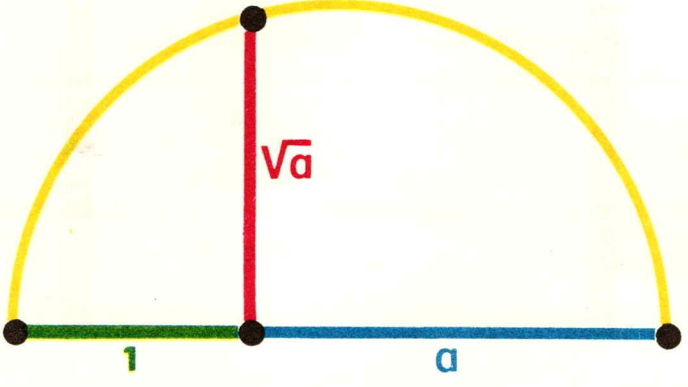


FIG. 313 ¡Justifica!

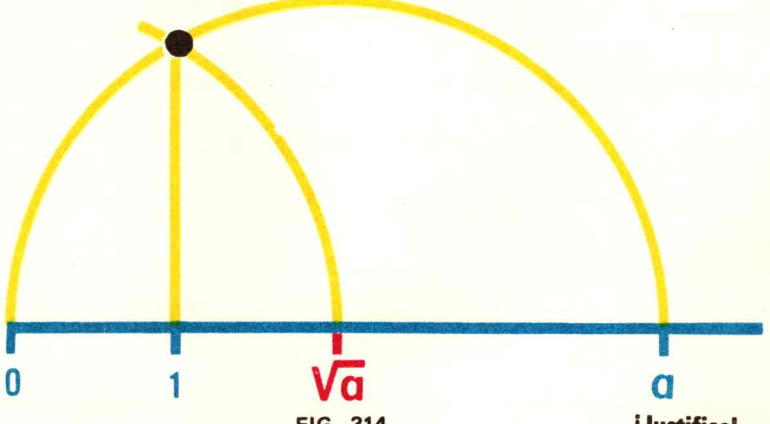
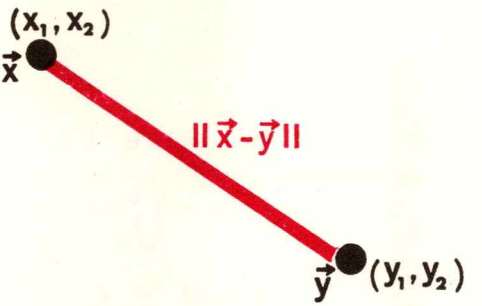


FIG. 314 ¡Justifica!

2 – CALCULO DE LA DISTANCIA

Problema *Base ortonormal*



$\vec{x} = \overrightarrow{ox}$

$\vec{y} = \overrightarrow{oy}$

Calcula $\| \vec{x} - \vec{y} \| = d(x, y)$

FIG. 315

Solución :

$$\| \vec{x} - \vec{y} \|^2 = (\vec{x} - \vec{y})^2$$

$$= (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 \qquad (12.7)$$

$$\| \vec{x} - \vec{y} \| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

EJERCICIOS

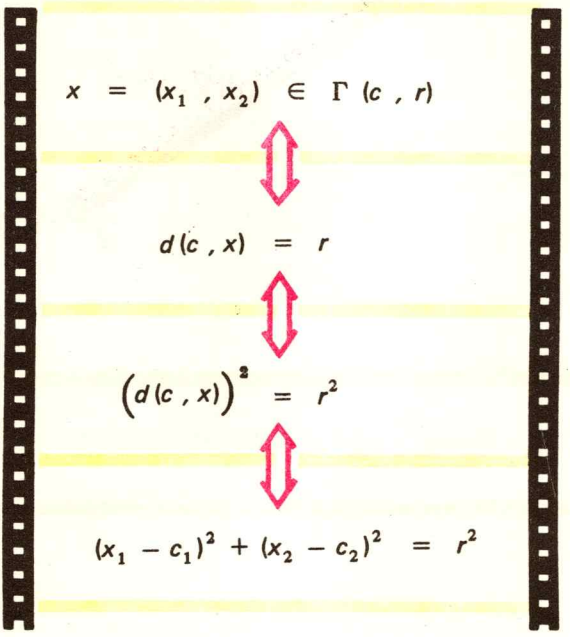
Base ortonormal $\vec{x} \neq \vec{o} \neq \vec{y}$

$$\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 \quad , \quad \vec{y} = y_1 \vec{e}_1 + y_2 \vec{e}_2$$

$$\cos (\vec{x}, \vec{y}) = ?$$

3 – ECUACION DE LA CIRCUNFERENCIA. (Base ortonormal)

Tenemos la circunferencia $\Gamma\,(c\,,\,r)$ de centro $c = (c_1\,,\,c_2)$ y de radio r



Por tanto

$$\Gamma\,(c\,,\,r) = \{\,(x_1 - x_2) \in \mathbf{R}^2 \qquad (x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2 = r^2\,\}$$

En resumen

$$\Gamma\,(c\,,\,r) \equiv (x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2 = r^2$$

4 – INTERMEDIO

$$\forall\, a \in \mathbf{R}^+ \;;\; \forall\, b \in \mathbf{R}$$

$b^2 < a^2$	$-a < b < a$
$\Updownarrow$	$\Updownarrow$
$\lvert b \rvert^2 < a^2$	$-a < b \quad \text{y} \quad b < a$
$\Updownarrow$	$\Updownarrow$
$\lvert b \rvert < a$	$-b < a \quad \text{y} \quad b < a$

$\Longleftrightarrow$

[M M 2]

Nos serviremos a menudo de este resultado :

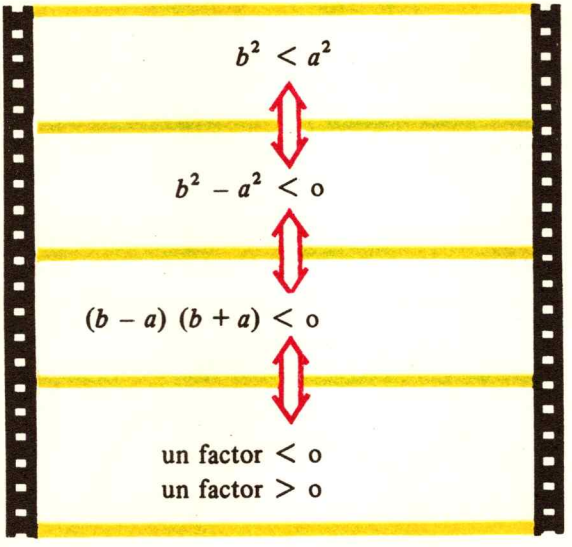
$$\forall\, a \in \mathbf{R}^+ \;;\; \forall\, b \in \mathbf{R}$$

$$b^2 < a^2 \iff -a < b < a$$

EJERCICIOS

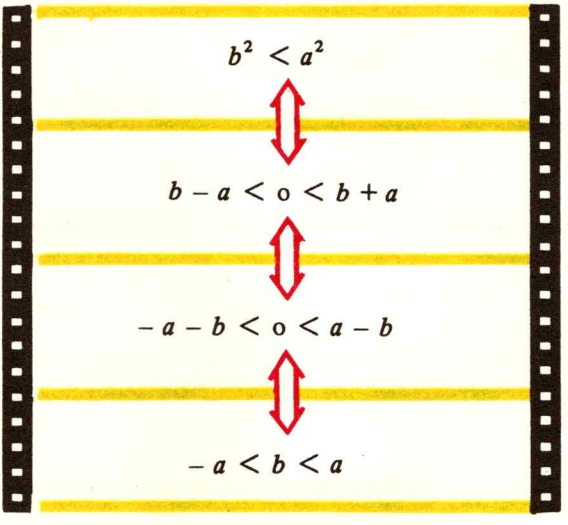
1. Otra demostración de la equivalencia anterior

$\forall\, a \in \mathbf{R}_0^+ \,;\, \forall\, b \in \mathbf{R}$:



Ahora bien $a > 0$ implica $b - a < b + a$

Por tanto



2. $\forall\, a \in \mathbf{R}_0^+ \,;\, \forall\, b \in \mathbf{R}$:

$$b^2 \leqslant a^2 \iff -a \leqslant b \leqslant a$$

5 – CUPLAS DE CIRCUNFERENCIAS

$$\Gamma_1 = \Gamma(c_1, r_1) \quad ; \quad \Gamma_2 = \Gamma(c_2, r_2)$$

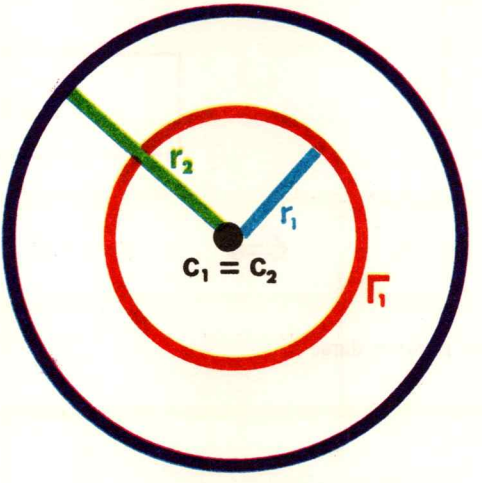
$$r_1 \geqslant r_2$$

La intersección de una recta y de una circunferencia comprende a lo más dos puntos (10.2)

Tres puntos distintos de una circunferencia no se hallan jamás alineados.

Tres puntos no alineados pertenecen a una y sólo a una circunferencia (10.3)

La intersección de dos circunferencias distintas comprende a lo más dos puntos.



$c_1 = c_2$ y $r_1 \neq r_2$ $\Longrightarrow$ $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \phi$

$c_1 = c_2$ y $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 \neq \phi$ $\Longrightarrow$ $r_1 = r_2$

CIRCUNFERENCIAS CONCENTRICAS

FIG. 316

Si $c_1 \neq c_2$

Entonces la recta de los centros $c_1\ c_2$ es eje de simetría para Γ_1 y Γ_2 también para $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$

Como $c_1 \neq c_2$, ubicaremos o en c_1 y elegiremos una base ortonormal tal que

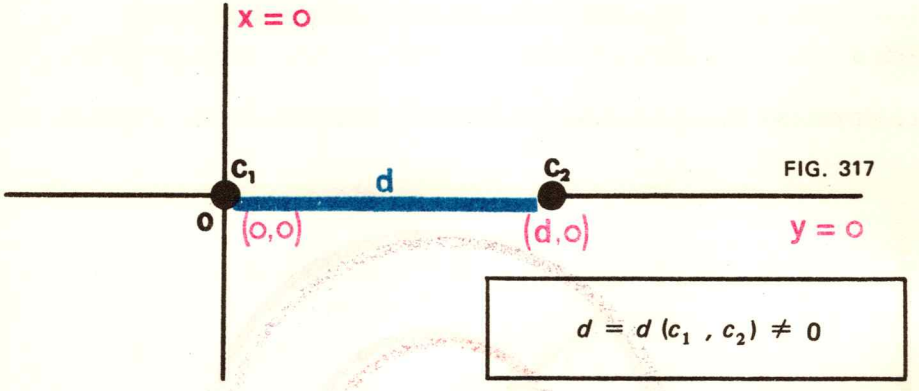


FIG. 317

$$d = d(c_1 , c_2) \neq 0$$

$$(x , y) \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2 \iff (x , -y) \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2$$

Tres eventualidades pueden darse :

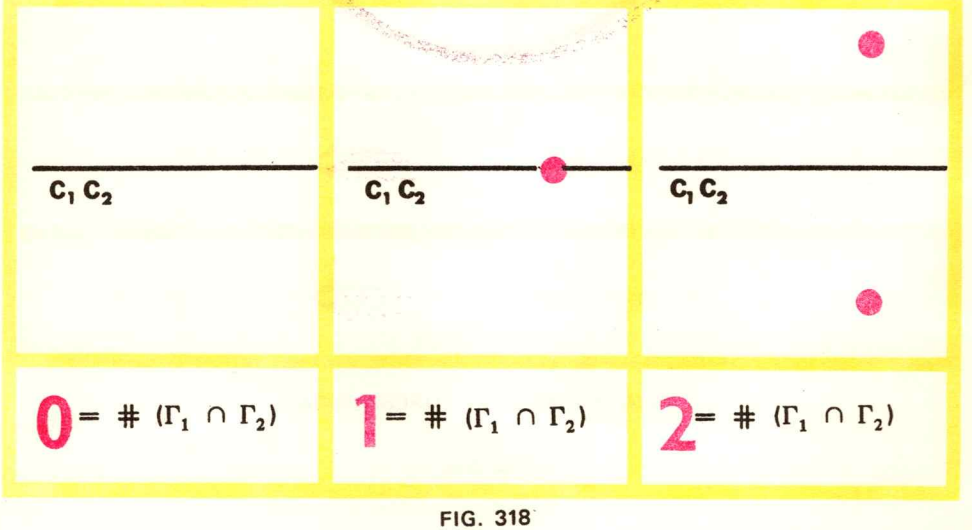


FIG. 318

Ecuación de las circunferencias

$$\begin{cases} \Gamma_1 \equiv & x^2 & + y^2 - r_1^2 = 0 \\ \Gamma_2 \equiv & (x-d)^2 & + y^2 - r_2^2 = 0 \end{cases}$$

o también

$$\begin{cases} \Gamma_1 \equiv x^2 + y^2 - r_1^2 = 0 \\ \Gamma_2 \equiv x^2 + y^2 - 2dx + d^2 - r_2^2 = 0 \end{cases}$$

Nos proponemos estudiar la intersección

$$\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} x^2 + y^2 - r_1^2 = 0 \\ \text{y} \\ x^2 + y^2 - 2dx + d^2 - r_2^2 = 0 \end{array} \right.$$

Resumiendo

$$\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} \square = 0 \\ \text{y} \\ \square = 0 \end{array} \right.$$

$\forall\, (x, y) \in \mathbf{R}^2$:

$\square = 0$ y $\square = 0$ $\Leftrightarrow$ $\square = 0$ y $\square - \square = 0$

$$\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \left\{ (x , y) \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; \square = 0 \;\text{ y }\; \square - \square = 0 \right\}$$

$$= \left\{ (x , y) \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 - r_1^2 = 0 \;\text{ y }\; 2\,d\,x - d^2 - r_1^2 + r_2^2 = 0 \right\}$$

$$= \left\{ (x , y) \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; y^2 = r_1^2 - x^2 \;\text{ y }\; x = \frac{d^2 + r_1^2 - r_2^2}{2\,d} \right\}$$

Para simplificar la escritura ponemos $\boxed{k = \dfrac{d^2 + r_1^2 - r_2^2}{2\,d}}$

La fórmula $r_1 \geqslant r_2$ implica que $k \in \mathbf{R}_0^+$

$$\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \{ (k , y) \;|\; y^2 = r_1^2 - k^2 \}$$

$$\#(\Gamma_1 \cap \Gamma_2) = 2 \iff r_1^2 > k^2 \iff r_1 > k$$

$$\#(\Gamma_1 \cap \Gamma_2) = 1 \iff r_1^2 = k^2 \iff r_1 = k$$

$$\#(\Gamma_1 \cap \Gamma_2) = 0 \iff r_1^2 < k^2 \iff r_1 < k$$

$\#\,(\Gamma_1 \cap \Gamma_2) = 2$	$\#\,(\Gamma_1 \cap \Gamma_2) = 1$
$\Updownarrow$	$\Updownarrow$
$r_1 > \dfrac{d^2 + r_1^2 - r_2^2}{2d}$	$r_1 = \dfrac{d^2 + r_1^2 - r_2^2}{2d}$
$\Updownarrow$	$\Updownarrow$
$2d\,r_1 = d^2 + r_1^2 - r_2^2$	$2d\,r_1 > d^2 + r_1^2 - r_2^2$
$\Updownarrow$	$\Updownarrow$
$(d - r_1)^2 - r_2^2 < 0$	$(d - r_1)^2 - r_2^2 = 0$
$\Updownarrow$	$\Updownarrow$
$(d - r_1)^2 < r_2^2$	$(d - r_1 - r_2) \cdot (d - r_1 + r_2) = 0$
$\Updownarrow$ § 4	$\Updownarrow$
$-r_2 < d - r_1 < r_2$	$d - r_1 - r_2 = 0$ o $d - r_1 + r_2 = 0$
$\Updownarrow$	$\Updownarrow$
$r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2$	$d = r_1 + r_2$ o $d = r_1 - r_2$

Acabamos de probar que

$$\Gamma_1 \cap \Gamma_2 \neq \phi \iff r_1 - r_2 \leqslant d \leqslant r_1 + r_2$$

Por tanto

$$\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \phi \iff d < r_1 - r_2 \text{ o } d > r_1 + r_2$$

Recapitulemos los resultados obtenidos

TEOREMA

Si $\Gamma_1 = \Gamma(c_1, r_1)$; $c_1 \neq c_2$

$\Gamma_2 = \Gamma(c_2, r_2)$; $r_1 \geqslant r_2$

$d = d(c_1, c_2)$

Entonces

$(\Gamma_1 \cap \Gamma_2) = 2 \iff r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2$

$(\Gamma_1 \cap \Gamma_2) = 1 \iff r_1 - r_2 = d$ o $d = r_1 + r_2$

$(\Gamma_1 \cap \Gamma_2) = 0 \iff d < r_1 - r_2$ o $r_1 + r_2 < d$

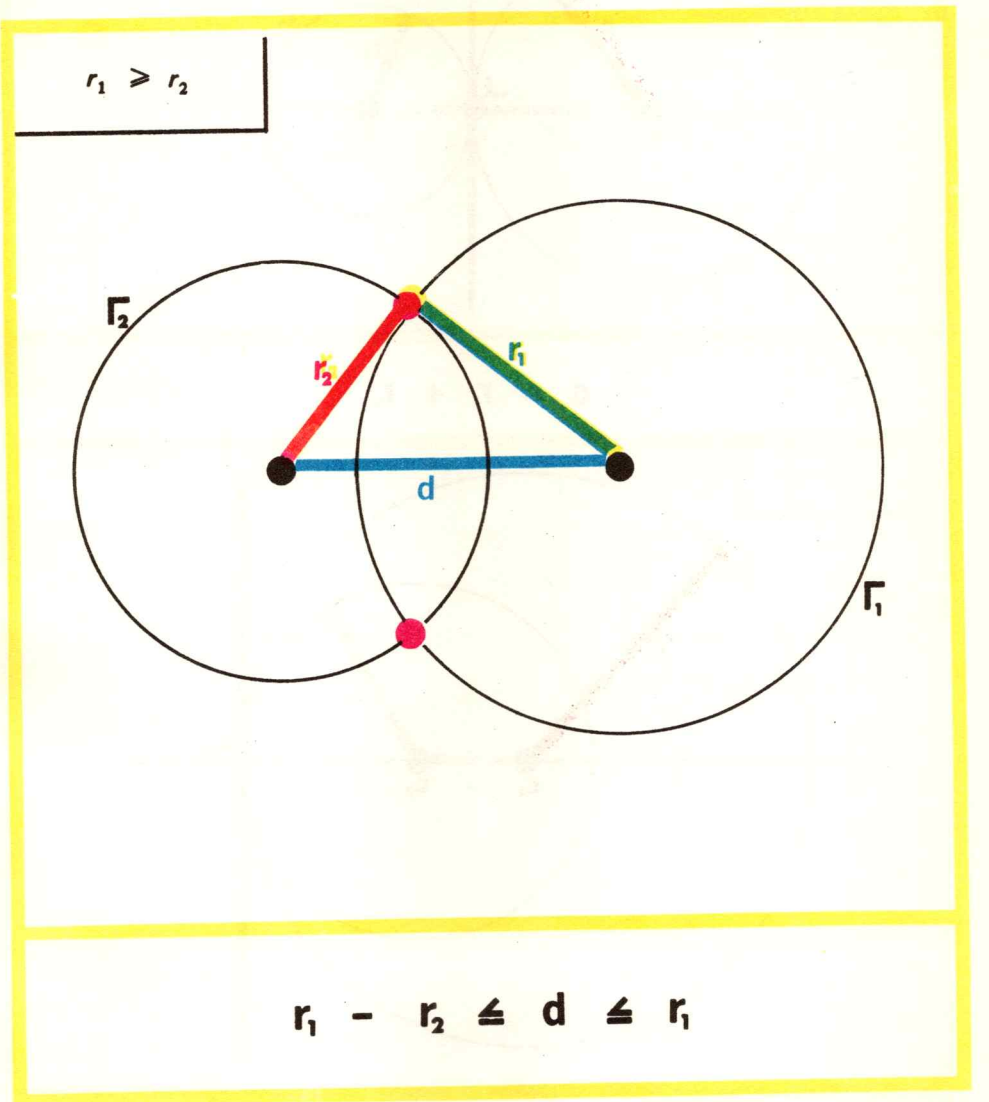


FIG. 319

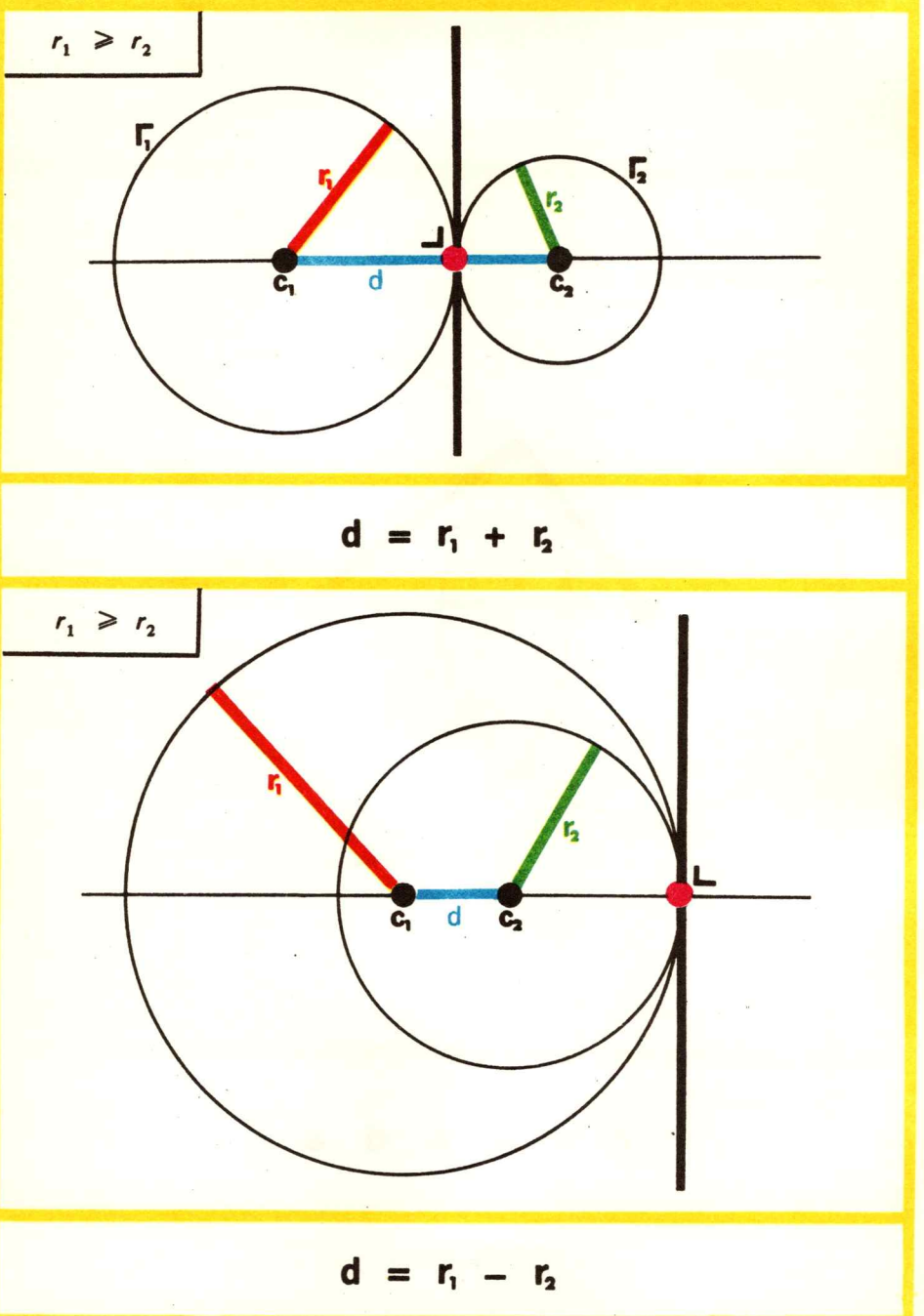

$r_1 \geqslant r_2$
Γ_1
r_1
Γ_2
r_2
c_1
d
c_2
$d = r_1 + r_2$
$r_1 \geqslant r_2$
r_1
r_2
c_1
d
c_2
$d = r_1 - r_2$

FIG. 320

EJERCICIOS

$$c_1 , c_2 \in \Pi \quad ; \quad c_1 \neq c_2 .$$
$$r_1 , r_2 \in \mathbf{R}^+ \quad ; \quad r_1 \geqslant r_2$$

1. **Si** $d(c_1 , c_2) = r_1 + r_2$

Entonces
$$\# \left(\Gamma(c_1 , r_1) \cap \Gamma(c_2 , r_2) \right) = 1$$
$$\# \left(\overline{\Delta}(c_1 , r_1) \cap \overline{\Delta}(c_2 , r_2) \right) = 1$$
$$\# \left(\Delta(c_1 , r_1) \cap \Delta(c_2 , r_2) \right) = 0$$

Se dice en este caso que

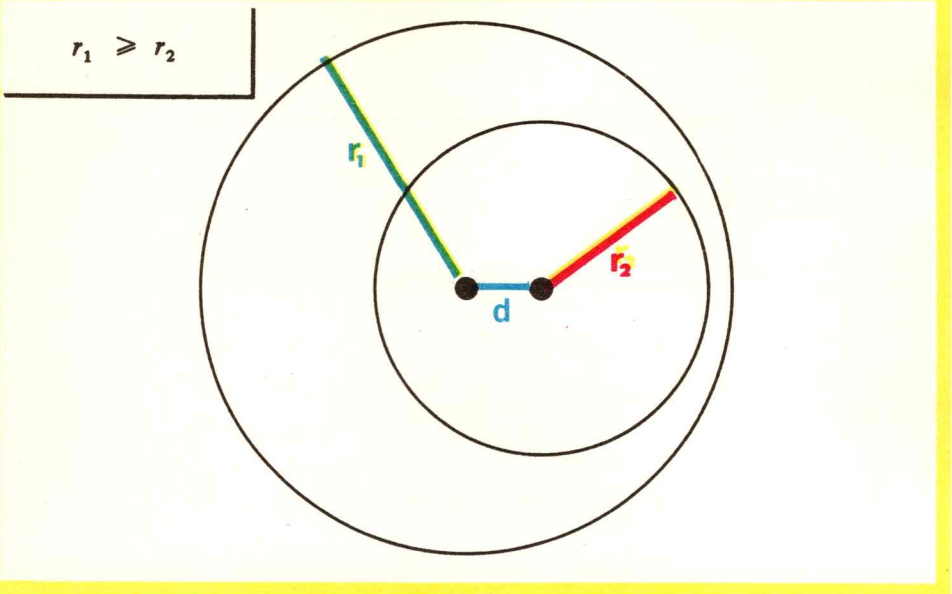
$\Gamma(c_1 , r_1)$ y $\Gamma(c_2 , r_2)$ son **tangentes exteriores.**

2. **Si** $d(c_1 , c_2) = r_1 - r_2$

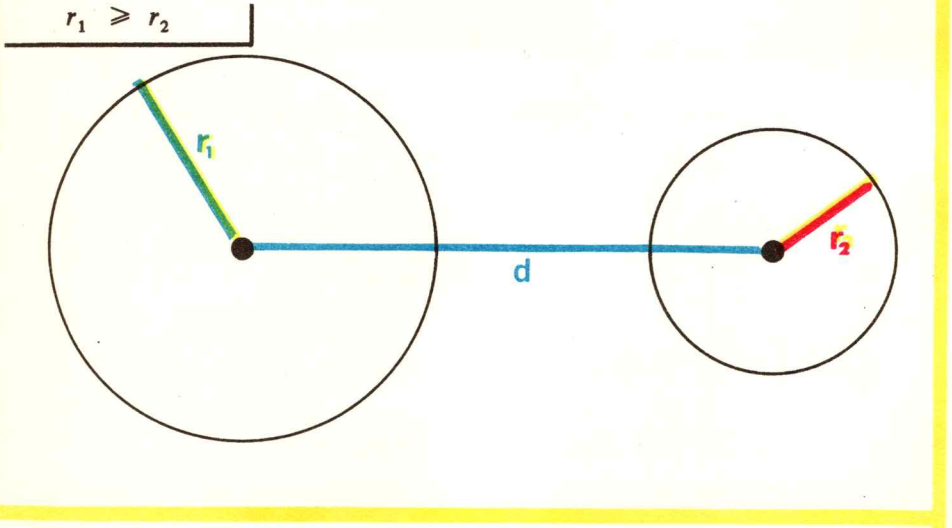
Entonces
$$\# \left(\Gamma(c_1 , r_1) \cap \Gamma(c_2 , r_2) \right) = 1$$
$$\overline{\Delta}(c_2 , r_2) \subset \overline{\Delta}(c_1 , r_1)$$

Se dice en este caso que

$\Gamma(c_2 , r_2)$ **es tangente interior de** $\Gamma(c_1 , r_1)$



$$d < r_1 - r_2$$



$$d > r_1 + r_2$$

FIG. 321

$$c_1 , c_2 \in \Pi \quad ; \quad c_1 \neq c_2$$
$$r_1 , r_2 \in \mathbb{R}^+ \quad ; \quad r_1 \geqslant r_2$$

3. **Si** $d(c_1 , c_2) < r_1 - r_2$

Entonces $\# \left(\Gamma(c_1 , r_1) \cap \Gamma(c_2 , r_2) \right) = 0$

$\bar{\Delta}(c_2 , r_2) \subset \bar{\Delta}(c_1 , r_1)$

Se dice en este caso que

$\Gamma(c_2 , r_2)$ **es interior a** $\Gamma(c_1 , r_1)$

4. **Si** $d(c_1 , c_2) > r_1 + r_2$

Entonces $\# \left(\Gamma(c_1 , r_1) \cap \Gamma(c_2 , r_2) \right) = 0$

$\# \left(\bar{\Delta}(c_1 , r_1) \cap \bar{\Delta}(c_2 , r_2) \right) = 0$

Se dice en este caso que

$\Gamma(c_1 , r_1)$ y $\Gamma(c_2 , r_2)$ **son exteriores.**

5.

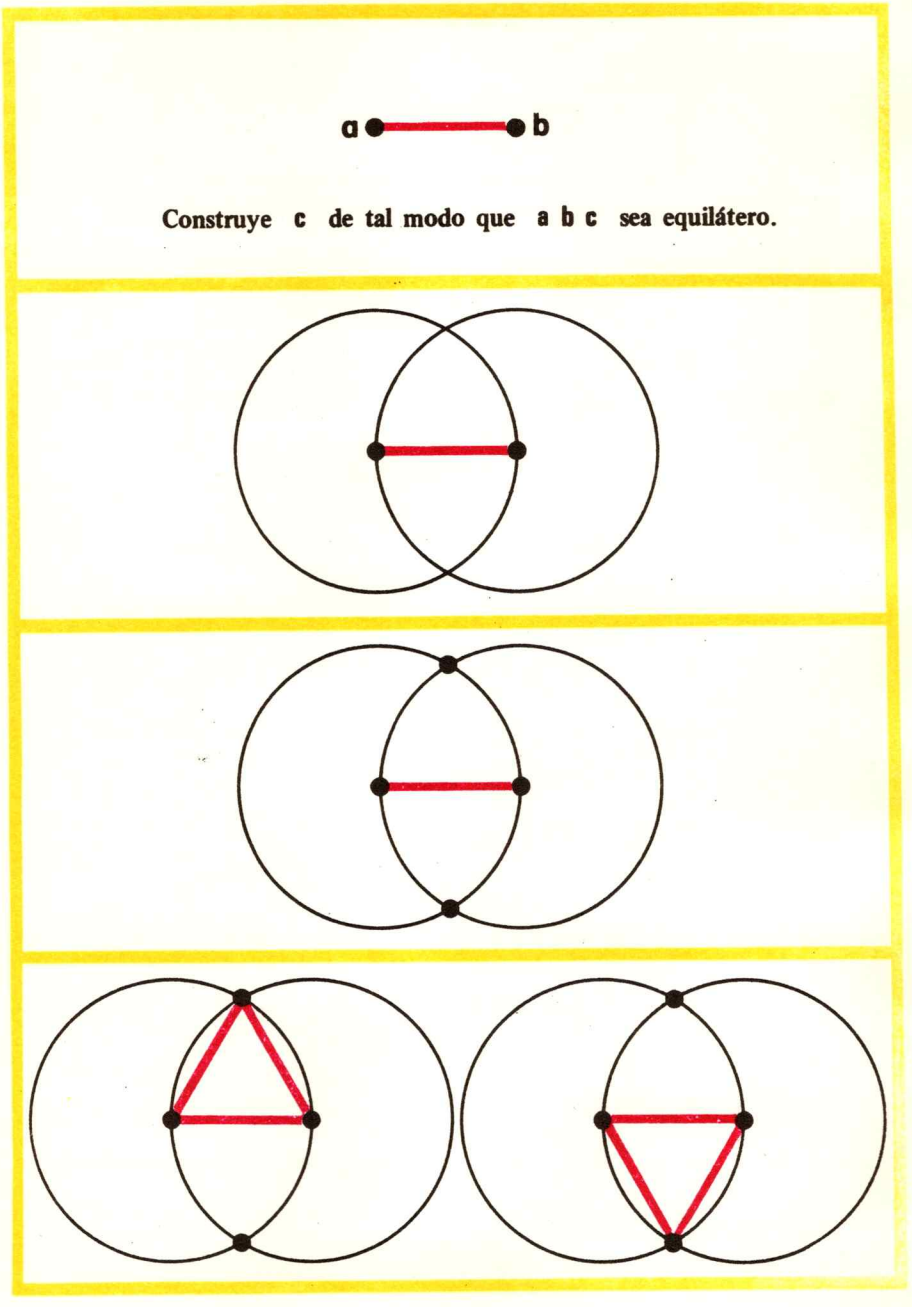


FIG. 322 **¡Justifica!**

6. He aquí una circunferencia $\Gamma = \Gamma(c, r)$ y $x \in \Pi \setminus \overline{\Delta}(c, r)$

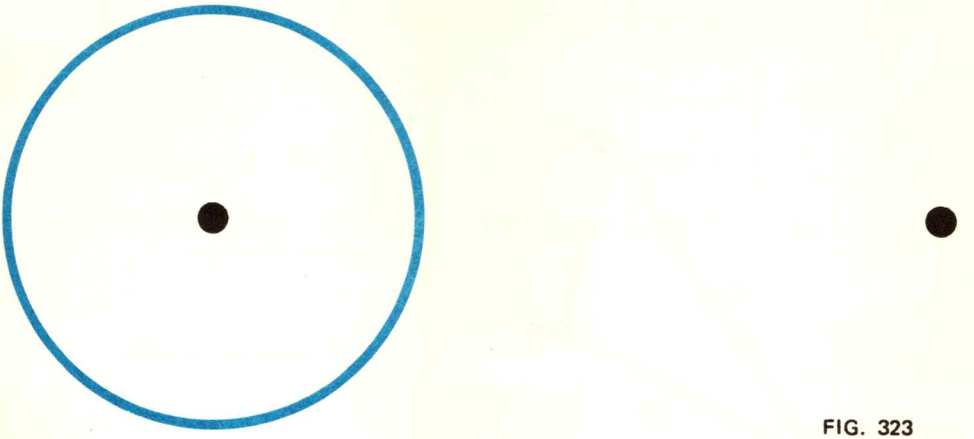


FIG. 323

¿Quieres construir las tangentes a Γ que comprendan a x?

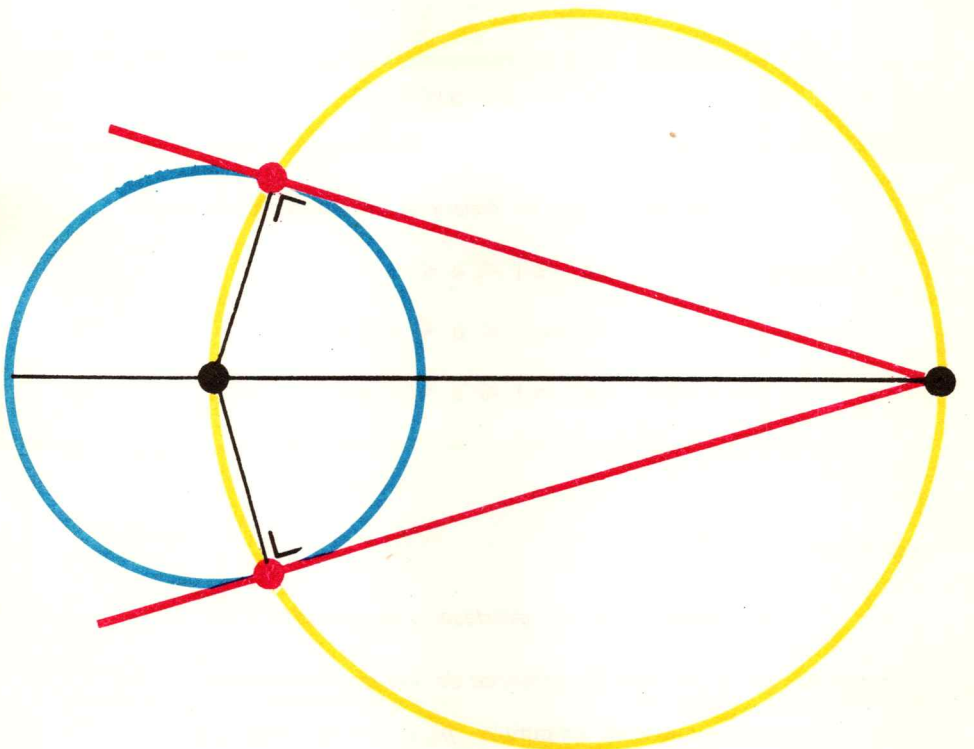
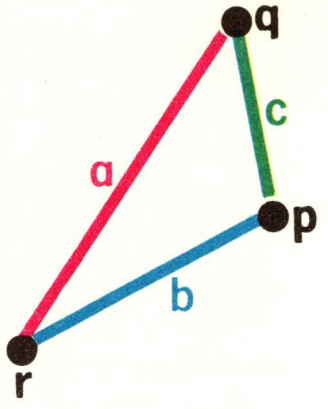


FIG. 324

¡Justifica!

6 – DISTANCIA DE UNA TERNA DE PUNTOS

DEFINICION $\forall\ p\ ,\ q\ ,\ r \in \Pi$



a , b , c

son las **distancias**

de la terna $(p\ ,\ q\ ,\ r)$

FIG. 325

Si $a\ ,\ b\ ,\ c$ *son las distancias de una terna de puntos*

Entonces

$$|b - c| \leqslant a \leqslant b + c \qquad (1)$$

$$|a - c| \leqslant b \leqslant a + c \qquad (2)$$

$$|a - b| \leqslant c \leqslant a + b \qquad (3)$$

(13.6)

PROPOSICION

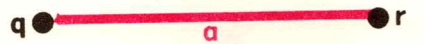
Si *los reales* $a\ ,\ b\ ,\ c$ *satisfacen a la condición* (1)

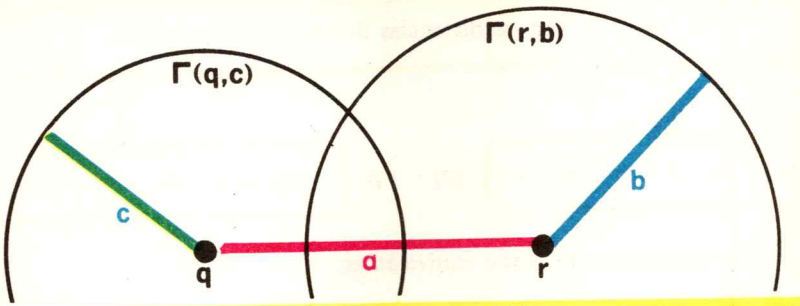
Entonces $a\ ,\ b\ ,\ c$ *son las distancias de una terna de puntos.*

Se debe probar que existen los puntos $p\ ,\ q\ ,\ r \in \Pi$ tales que

$$a = d(q\ ,\ r) \quad ; \quad b = d(p\ ,\ r) \quad ; \quad c = d(p\ ,\ q)$$

DEMOSTRACION :

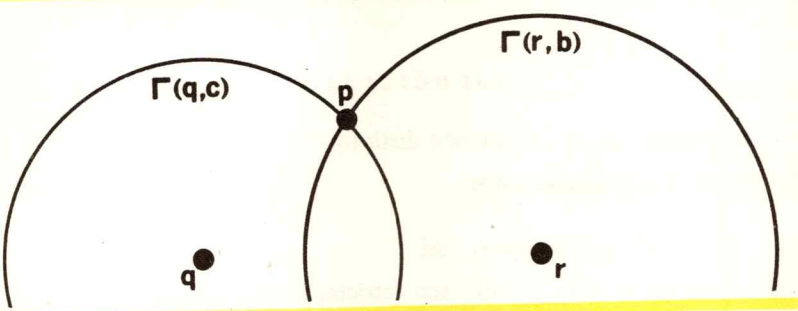


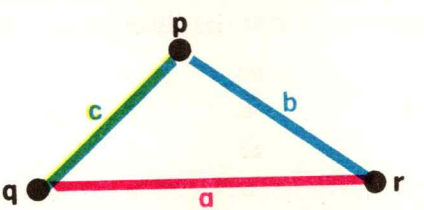


$$|\,b - c\,| \leqslant a \leqslant b + c$$

$$|\,b - c\,| \leqslant d\,(q\,,r) \leqslant b + c$$

$$\Gamma\,(q\,,\,c) \cap \Gamma\,(r\,,\,b) \neq \phi$$





l.q.q.d.

FIG. 326

Para todo $a , b , c \in \mathbf{R}^+$:

$$|b - c| \leqslant a \leqslant b + c \quad (1)$$

$\Updownarrow$

a , b , c son las distancias de una terna de puntos

$\Updownarrow$ $\qquad$ $\Updownarrow$

$$|a - c| \leqslant b \leqslant a + c \quad (2) \qquad |a - b| \leqslant c \leqslant a + b \quad (3)$$

Las tres desigualdades dobles son equivalentes.

TEOREMA

Dos ternas de puntos son isométricas ssi tienen las mismas distancias (9.12)

Los reales positivos a , b , c son las distancias de una terna de puntos ssi satisfacen a las desigualdades dobles equivalentes (1), (2) , (3)

EJERCICIOS

1. **Si** los puntos p , q , r no son distintos
   Entonces p , q , r están alineados.

2. Los puntos p , q , r son distintos **ssi**
   las distancias de la terna (p , q , r) son estrictamente positivas.

3. Los reales estrictamente positivos a , b , c son las distancias de un terna de puntos alineados

$$a = |b - c| \quad \text{ssi} \quad \text{o} \quad a = b + c$$

$$b = |a - c| \quad \text{ssi} \quad \text{o} \quad b = a + c$$

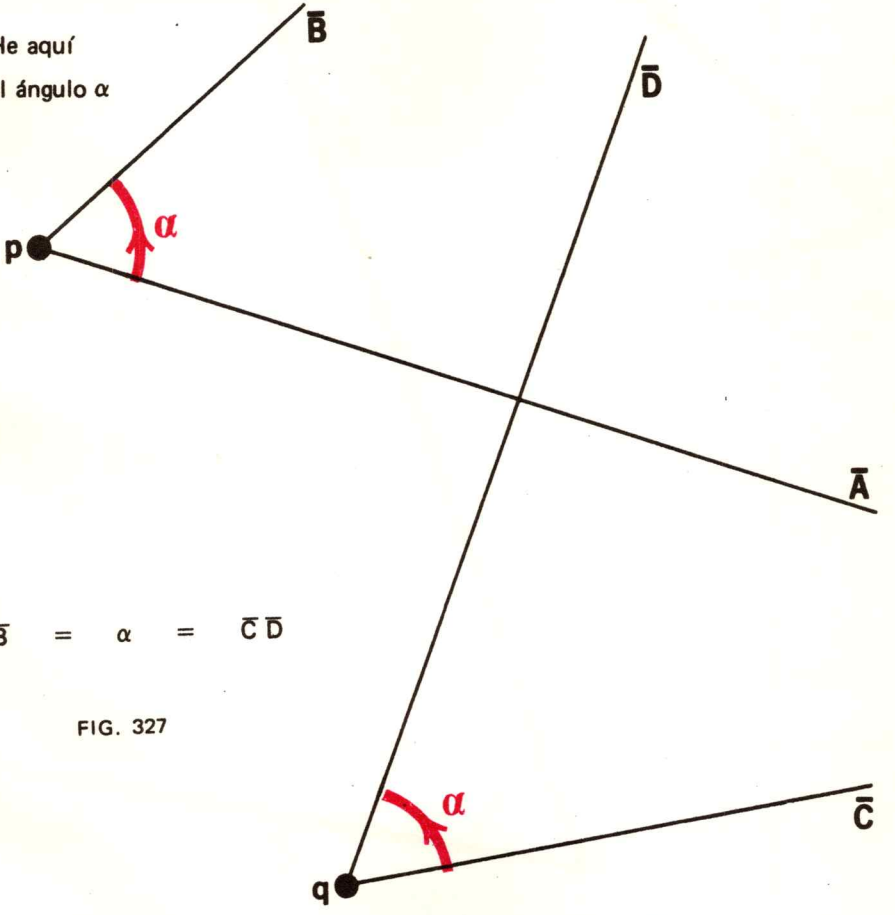
$$c = |a - b| \quad \text{ssi} \quad \text{o} \quad c = a + b$$

18

Primeros elementos de Trigonometría

1 – COSENO DE UN ANGULO

He aquí
el ángulo α



$\overline{A}\,\overline{B} = \alpha = \overline{C}\,\overline{D}$

FIG. 327

Existe un desplazamiento d tal que $d\,\overline{A} = \overline{C}$ y $d\,\overline{B} = \overline{D}$ (prop 15.6.2)

Se tiene además que $d\,(p) = q$

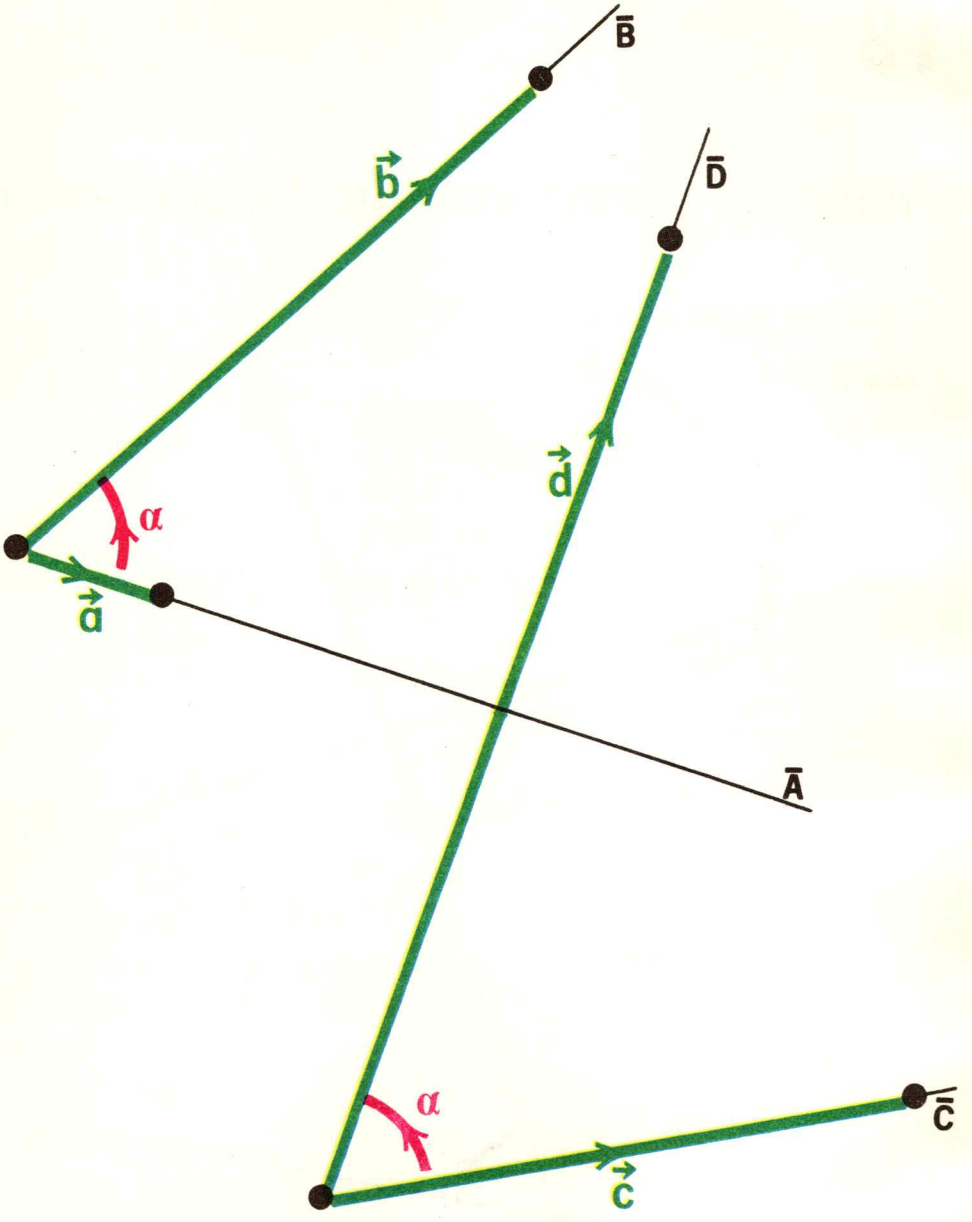


FIG. 328

Calculemos $\cos(\vec{a}, \vec{b})$ y $\cos(\vec{c}, \vec{d})$

Referencias métricas

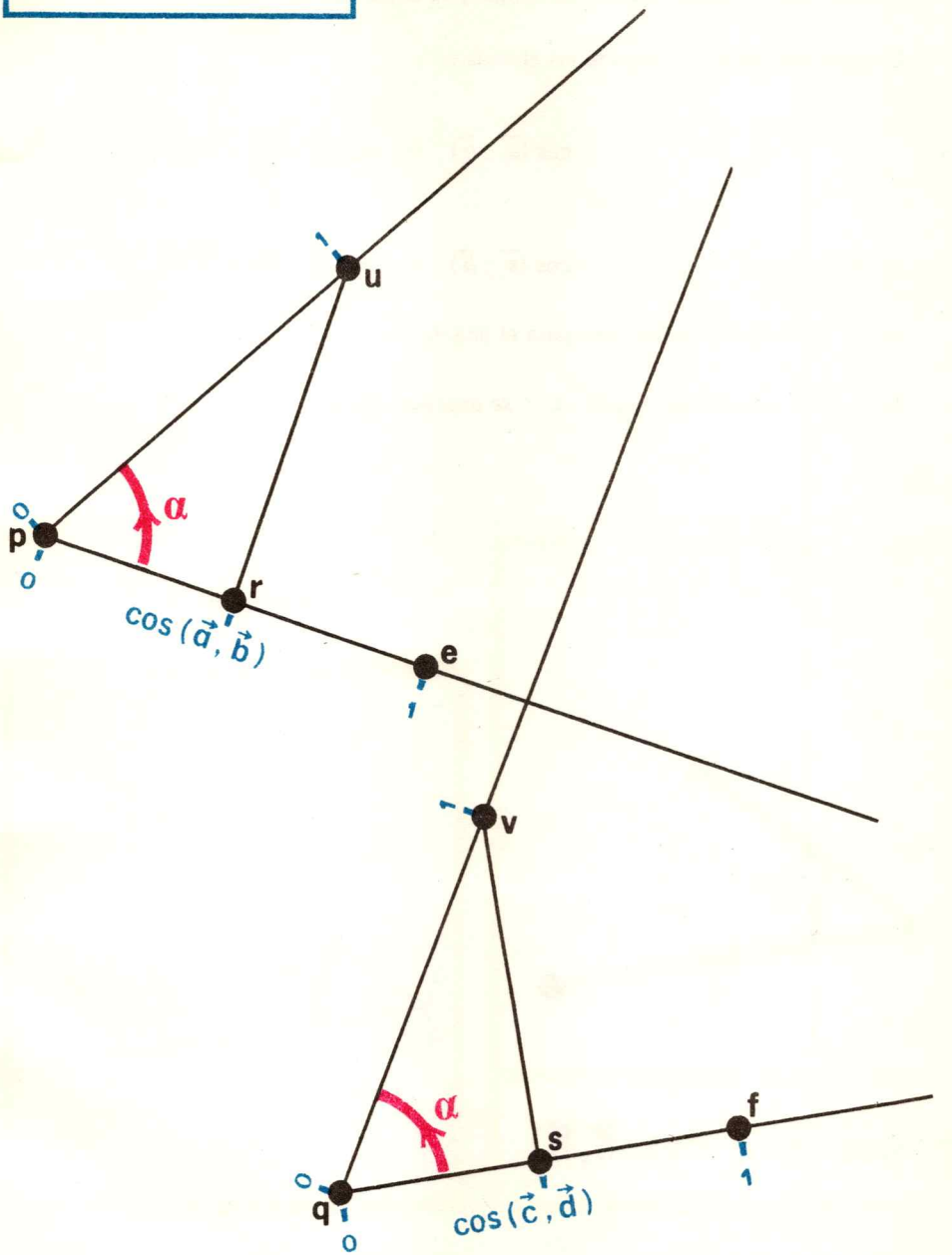


FIG. 329

El desplazamiento d respeta las longitudes : $d\,(e) = f$; $d(u) = v$

El desplazamiento d respeta las rectas y la perpendicularidad : $d\,(r) = s$

El desplazamiento d respeta las abcisas :

$$\cos(\vec{a}\,,\vec{b}) = \cos(\vec{c}\,,\vec{d})$$

El número real $\cos(\vec{a}\,,\vec{b}) = \cos(\vec{c}\,,\vec{d})$

queda perfectamente definido para el ángulo α

Se le llama **coseno del ángulo** α *y se expresa* $\cos\alpha$

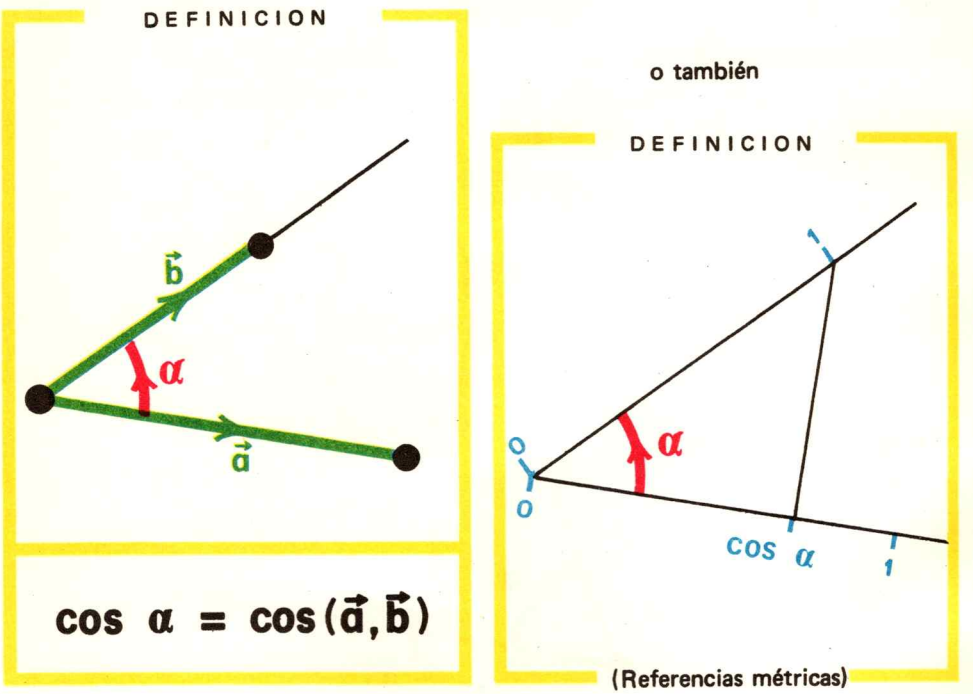


FIG. 330

2 — ANGULO NULO — ANGULO LLANO — ANGULOS RECTOS

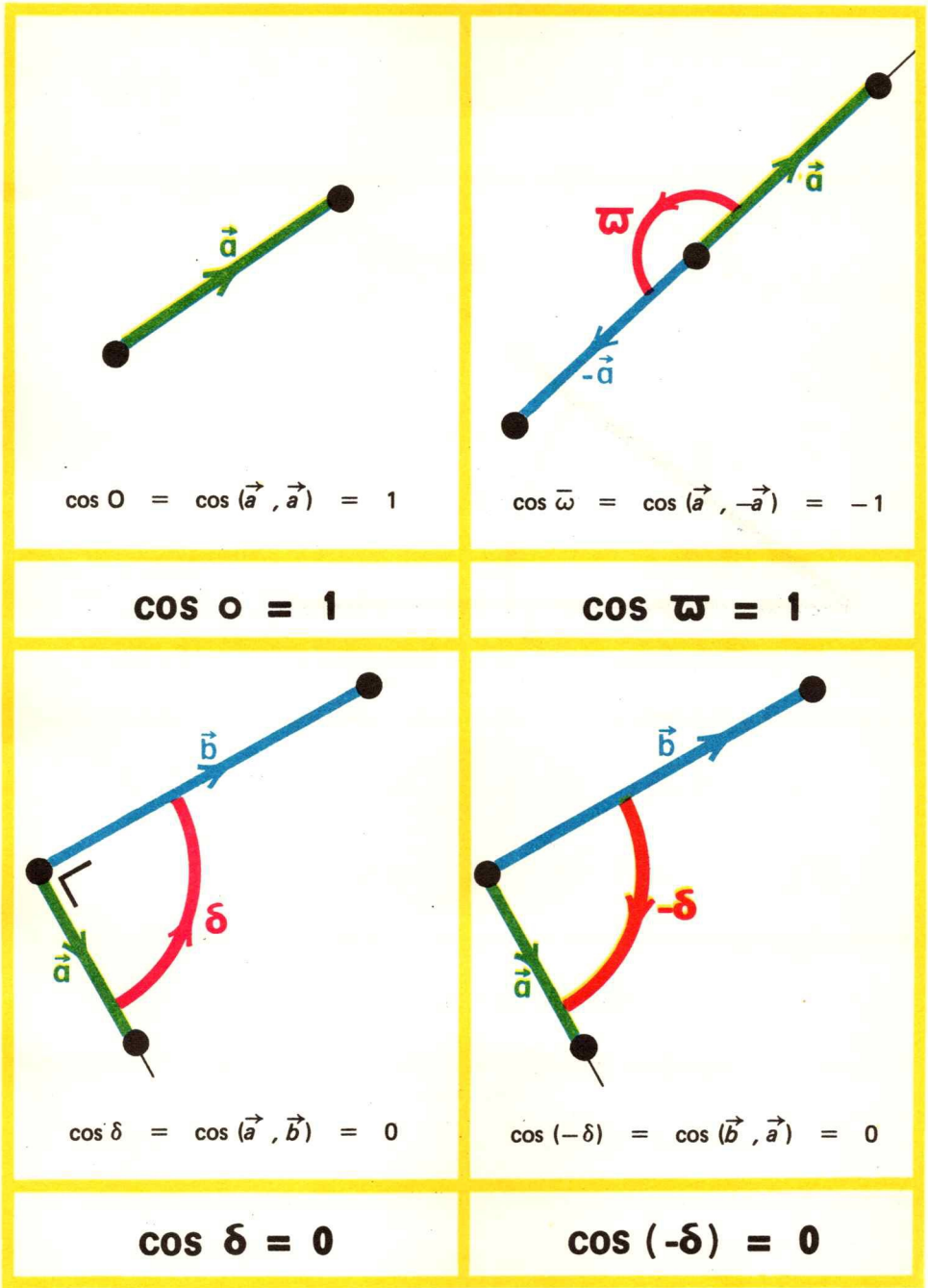
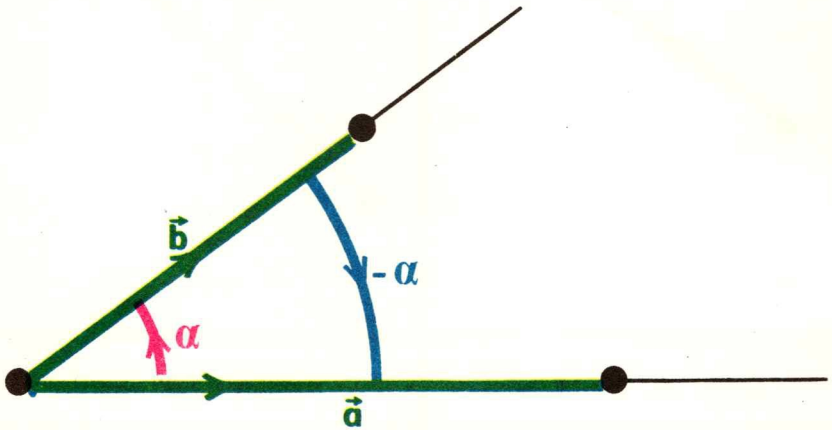


FIG. 331

3 – COSENO DEL OPUESTO DE UN ANGULO



$$\cos \alpha = \cos (\vec{a}, \vec{b}) \quad ; \quad \cos (-\alpha) = \cos (\vec{b}, \vec{a})$$

$$\cos (\vec{b}, \vec{a}) = \cos (\vec{a}, \vec{b})$$

$$\cos (-\alpha) = \cos \alpha$$

FIG. 332

4.– ANGULOS ANTISUPLEMENTARIOS

DEFINICION $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbf{A}$

α y β *son* **antisuplementarios**

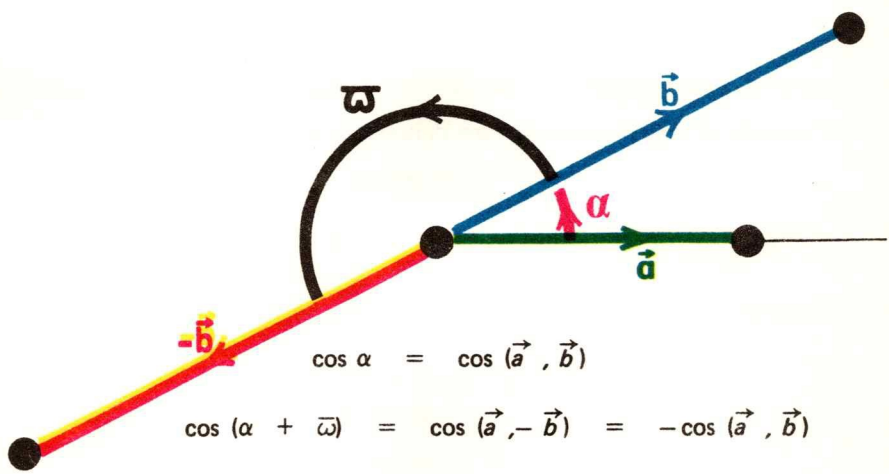
ssi

$$\alpha - \beta = \overline{\omega}$$

La relación de **antisuplementariedad** así definida en **A**
es **simétrica** (y antirreflexiva)

He aquí los ángulos antisuplementarios α y β

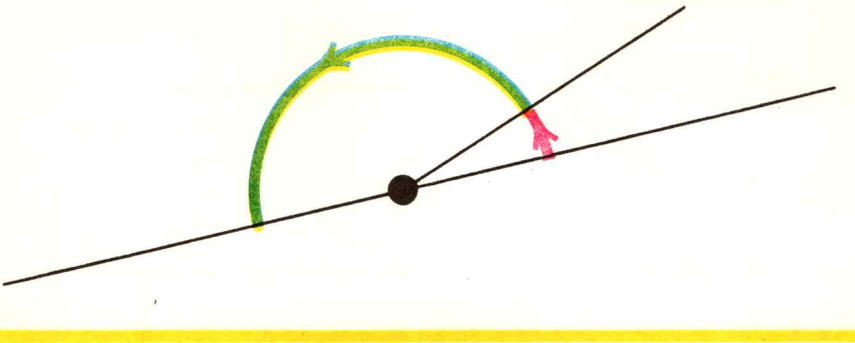
Luego $\beta = \alpha + \overline{\omega}$



$$\cos\,(\alpha + \overline{\omega}) = -\cos\,\alpha$$

FIG. 333

5 – ANGULOS SUPLEMENTARIOS



ANGULOS SUPLEMENTARIOS

FIG. 334

DEFINICION $\forall\, \alpha\,, \beta \in A$

α y β *son* **suplementarios**

ssi

$$\alpha + \beta = \overline{\omega}$$

La relación de **suplementariedad** así definida en **A**

es **simétrica.**

Tenemos dos ángulos suplementarios $\alpha\,,\ \beta$

Entonces $\beta = \overline{\omega} - \alpha$

$$\begin{aligned} \cos(\overline{\omega} - \alpha) &= \cos(-\alpha + \overline{\omega}) \\ &= -\cos(-\alpha) && (\S\ 4) \\ &= -\cos\alpha && (\S\ 3) \end{aligned}$$

$$\boxed{\cos(\overline{\omega} - \alpha) = -\cos\alpha}$$

6 – REPRESENTACION DE ANGULOS

He aquí la circunferencia $\Gamma = \Gamma(c, 1)$

y fijamos una vez por todas un punto a de Γ

Se obtiene así la

FIG. 335

Todo punto b de la circunferencia unitaria punteada define el ángulo

$$\beta = \widehat{[ca\,[cb}$$

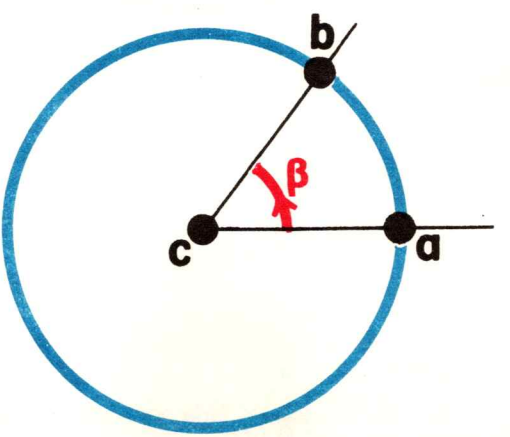


FIG. 336

La aplicación

$$\Gamma \to \mathbf{A} \qquad : \qquad b \to \widehat{[ca\ [cb}$$

es una **biyección.**

La **circunferencia unitaria punteada** *representa perfectamente a* **A**

Así marcaremos β en b

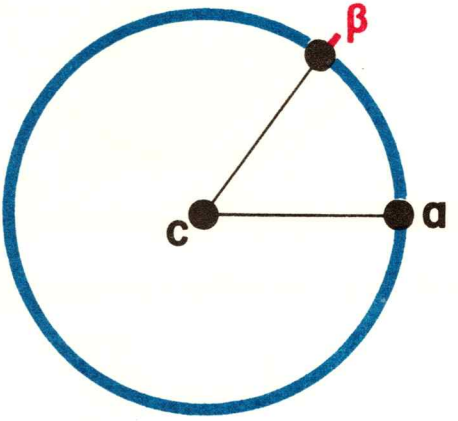


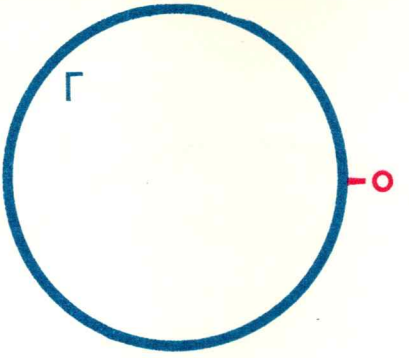
FIG. 337

Según esta convención el punto a representa el ángulo nulo

$$\mathbf{O} = \widehat{[ca\ [ca}$$

El punto a se marcará pues **O**

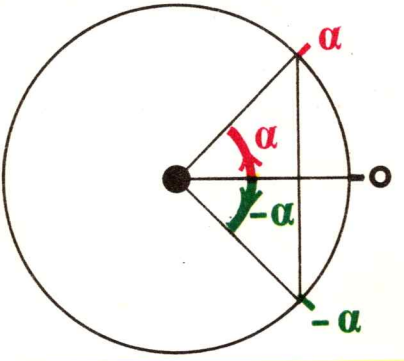
Se obtiene, pues, la circunferencia unitaria punteada (representando perfectamente el conjunto **A** de ángulos), marcando O uno de sus puntos.



... y la circunferencia Γ

se ha convertido en el GRUPO de ANGULOS

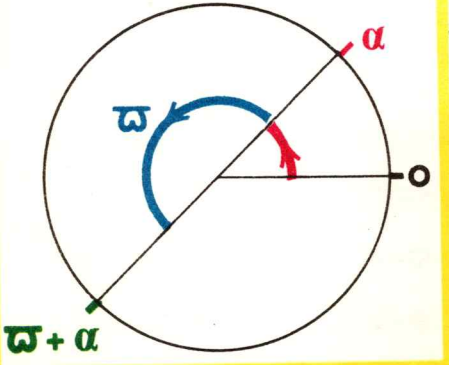
EJEMPLOS



Toda simetría ortogonal

invierte

los ángulos.



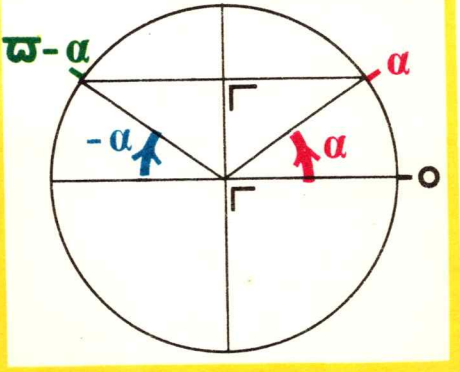


FIG. 338

7 – COSENO. (Recapitulación)

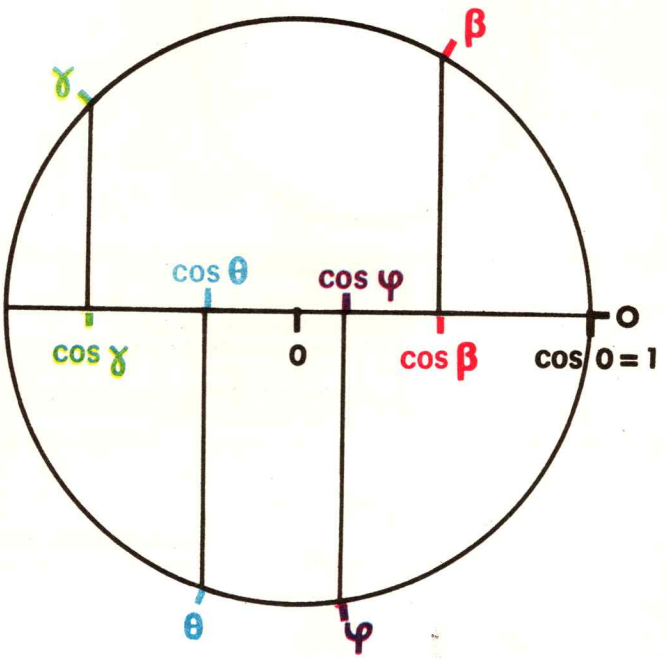


FIG. 339

$\forall \alpha , \beta \in A$

$\cos \alpha = \cos \beta$	$\Longleftrightarrow$	$\beta = \pm \alpha$
$\cos \alpha = 1$	$\Longleftrightarrow$	$\alpha = 0$
$\cos \alpha = 0$	$\Longleftrightarrow$	$\alpha = \pm \delta$
$\cos \alpha = -1$	$\Longleftrightarrow$	$\alpha = \varpi$

He aquí $k \in]-1\ ,\ +1\ [$

¿Cuáles son los ángulos cuyo coseno es igual a k?

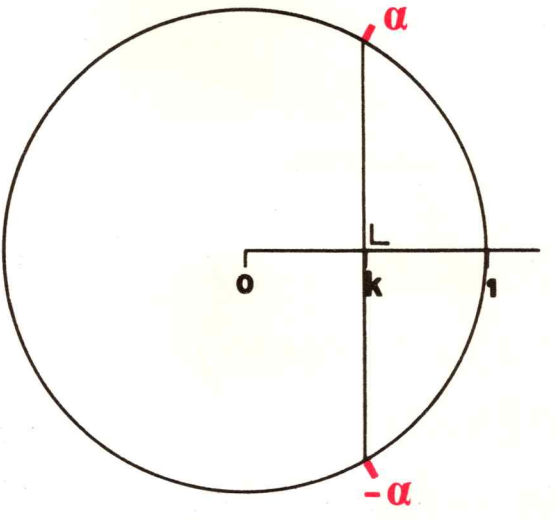


FIG. 340

$\{\alpha\ ,\ -\alpha\}$ *es el* **conjunto** *de ángulos cuyo coseno es igual a k*

Resumamos las fórmulas establecidas para el coseno

$$\forall\ \alpha \in \mathbf{A}$$

$$\cos\ (-\alpha) = \cos\ \alpha$$

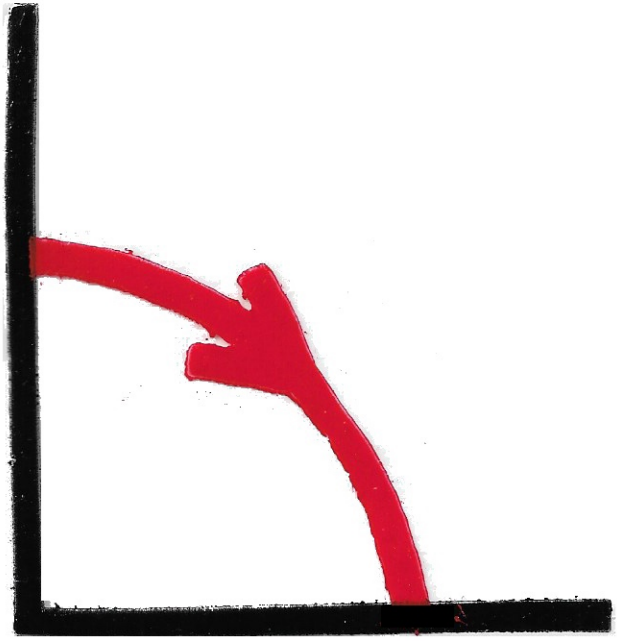
$$\cos\ (\varpi + \alpha) = -\cos\ \alpha$$

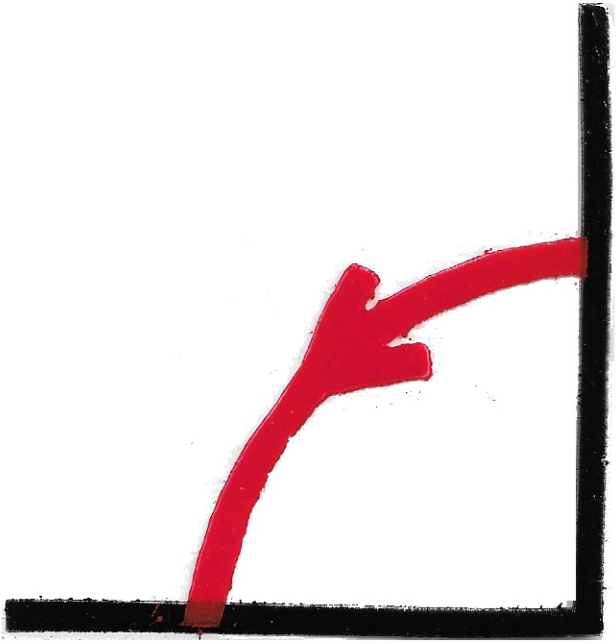
$$\cos\ (\varpi - \alpha) = -\cos\ \alpha$$

No se caracteriza uno de los ángulos rectos del plano diciendo como esta niñita.

Conservar vertical la página transparente

FIG. 341





este niñito dirá
del mismo ángulo :

FIG. 342

8 – ORIENTACION DEL PLANO

Existen dos ángulos rectos diferentes opuestos el uno al otro

Orientar el plano

es designar de una vez para siempre

uno de los ángulos rectos como **ángulo positivo.**

DEFINICION

En lo que sigue del capítulo

Supondremos siempre el plano orientado.

El **ángulo recto positivo** *será designado* δ

El ángulo $-\delta$ *es el ángulo recto* **negativo.**

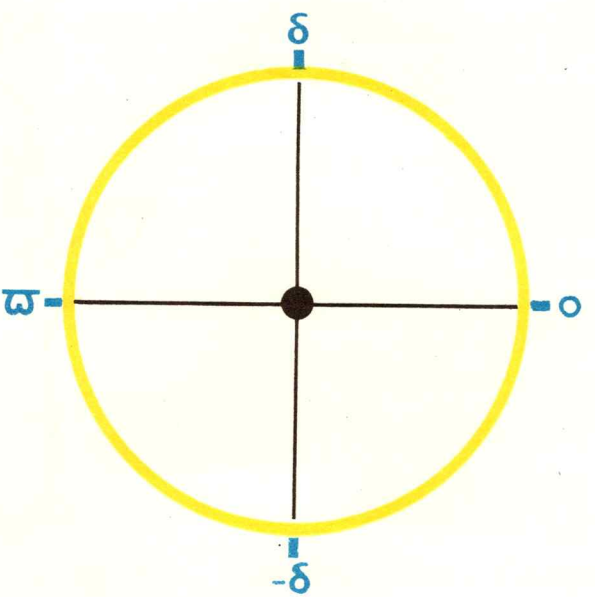
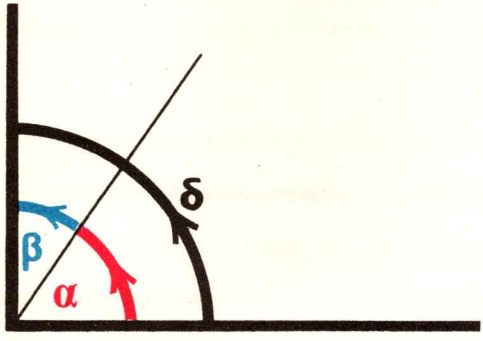


FIG. 343

9 – ANGULOS COMPLEMENTARIOS



DEFINICION $\forall\, \alpha\,, \beta \in A$

α *y* β *son* **complementarios**

ssi

$$\alpha + \beta = \delta$$

FIG. 344

La relación de **complementariedad** que acabamos de definir en **A**

depende de la orientación . . .

. . . puesto que depende de la elección del ángulo recto denominado δ

Los ángulos α y β son complementarios.

$\Updownarrow$ $\Updownarrow$ $\Updownarrow$

$\beta = \delta - \alpha \iff \alpha + \beta = \delta \iff \alpha = \delta - \beta$

$\delta - \alpha$ es el (único) **complemento** del ángulo α

10 – SENO

DEFINICION

El **seno** *de un ángulo es igual al coseno de su complemento.*

$\forall\, \alpha \in A$: $\quad \operatorname{sen} \alpha = \cos(\delta - \alpha)$

Construcción del seno

$\operatorname{sen} \alpha = \cos(\delta - \alpha) = \cos(-\delta + \alpha)$

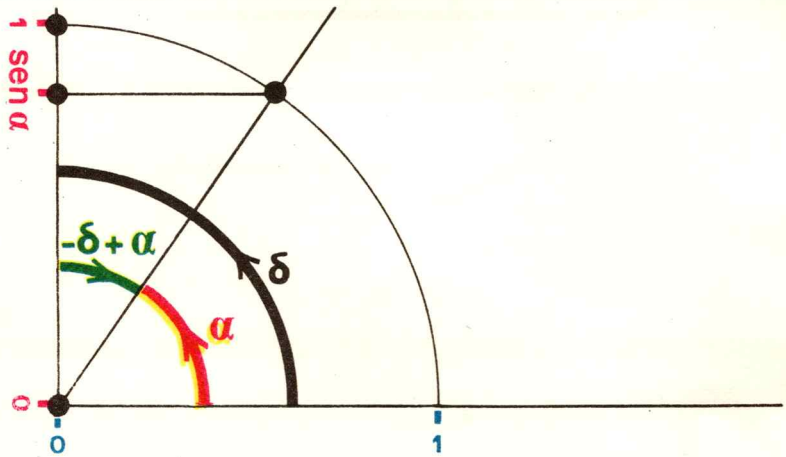


FIG. 345

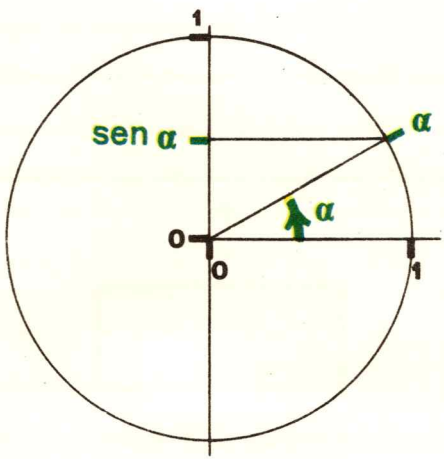


FIG. 346

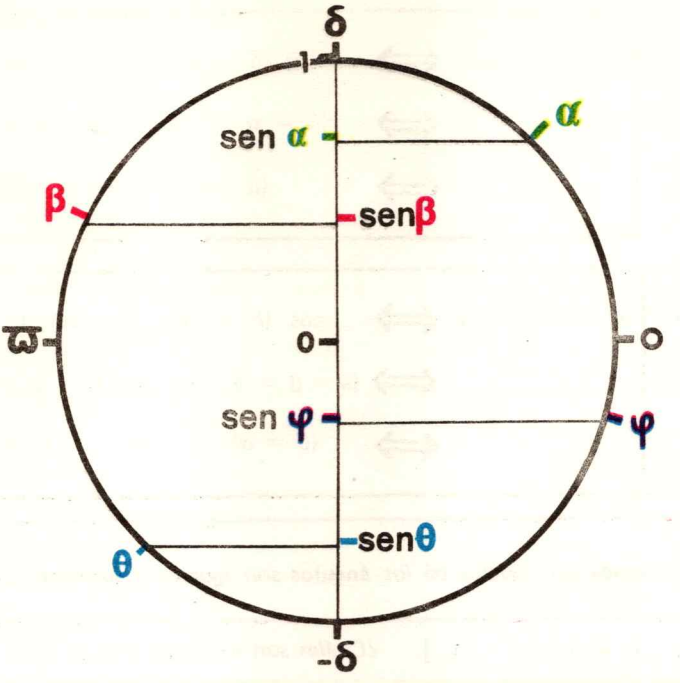


FIG. 347

$\forall\ \alpha \in A$:	$\operatorname{sen}\alpha = \cos(\delta - \alpha)$ de donde $\lvert\operatorname{sen}\alpha\rvert \leqslant 1$		
	$\operatorname{sen}\alpha = 1$	$\Longleftrightarrow$	$\cos(\delta - \alpha) = 1$
		$\Longleftrightarrow$	$\delta - \alpha = 0$
		$\Longleftrightarrow$	$\alpha = \delta$
	$\operatorname{sen}\alpha = -1$	$\Longleftrightarrow$	$\cos(\delta - \alpha) = -1$
		$\Longleftrightarrow$	$\delta - \alpha = \varpi$
		$\Longleftrightarrow$	$\alpha = -\delta$

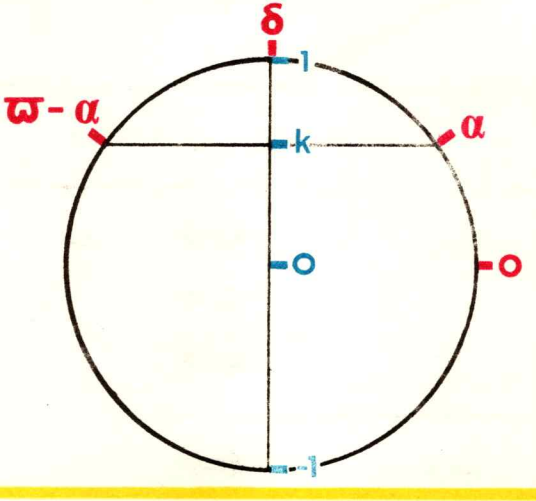
$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\alpha = 0 &\iff \cos(\delta-\alpha) = 0 \\ &\iff (\delta-\alpha = \delta) \text{ o } (\delta-\alpha = -\delta) \\ &\iff (\alpha = 0) \text{ o } (\alpha = \varpi) \end{aligned}$$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbf{A}$:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\beta &\iff \cos(\delta-\alpha) = \cos(\delta-\beta) \\ &\iff (\delta-\beta = \delta-\alpha) \text{ o } (\delta-\beta = -(\delta-\alpha)) \\ &\iff (\beta = \alpha) \text{ o } (\beta = \varpi-\alpha) \end{aligned}$$

Los **senos** *son* **iguales ssi** *los* **ángulos** *son* **iguales o suplementarios.**

He aquí $k \in [\,-1\,,\,1\,]$. *¿Cuáles son los ángulos cuyo seno es igual a k?*



$\{\alpha\,,\,\varpi-\alpha\}$ *es* **el conjunto** *de ángulos cuyo seno es igual a k*

FIG. 348

11 – COSENO Y SENO

Si $\vec{e}$, $\vec{u}$ *son vectores normados ortogonales*

y a , $b \in \mathbf{R}$

Entonces

$$(a\,\vec{e} + b\,\vec{u})^2$$

$$= (a\,\vec{e})^2 + 2\,(a\,\vec{e})\,(b\,\vec{u}) + (b\,\vec{u})^2$$

$$= a^2 \cdot \vec{e} + 2 \cdot ab \cdot \vec{e}\,\vec{u} + b^2 \cdot \vec{u}$$

$$= a^2 + b^2$$

He aquí un ángulo α

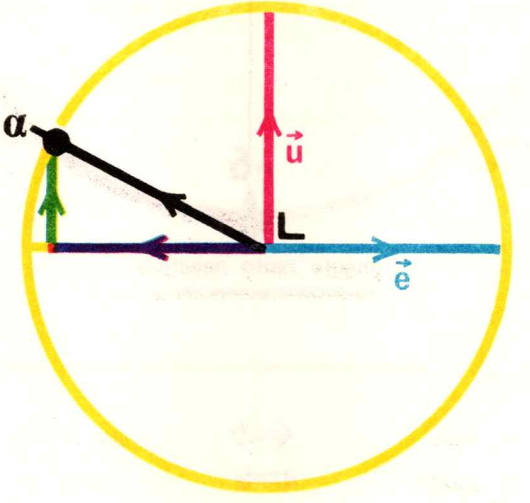


FIG. 349

$$\vec{v} = (\cos \alpha) \cdot \vec{e} + (\text{sen } \alpha) \cdot \vec{u}$$

$$1 = \vec{v}^2 = \cos^2 \alpha + \text{sen}^2 \alpha$$

$\forall\, \alpha \in \mathbf{A}$:

$$\mathbf{sen^2\,\alpha + \cos^2\,\alpha = 1}$$

12 – CLASIFICACION DE LOS ANGULOS

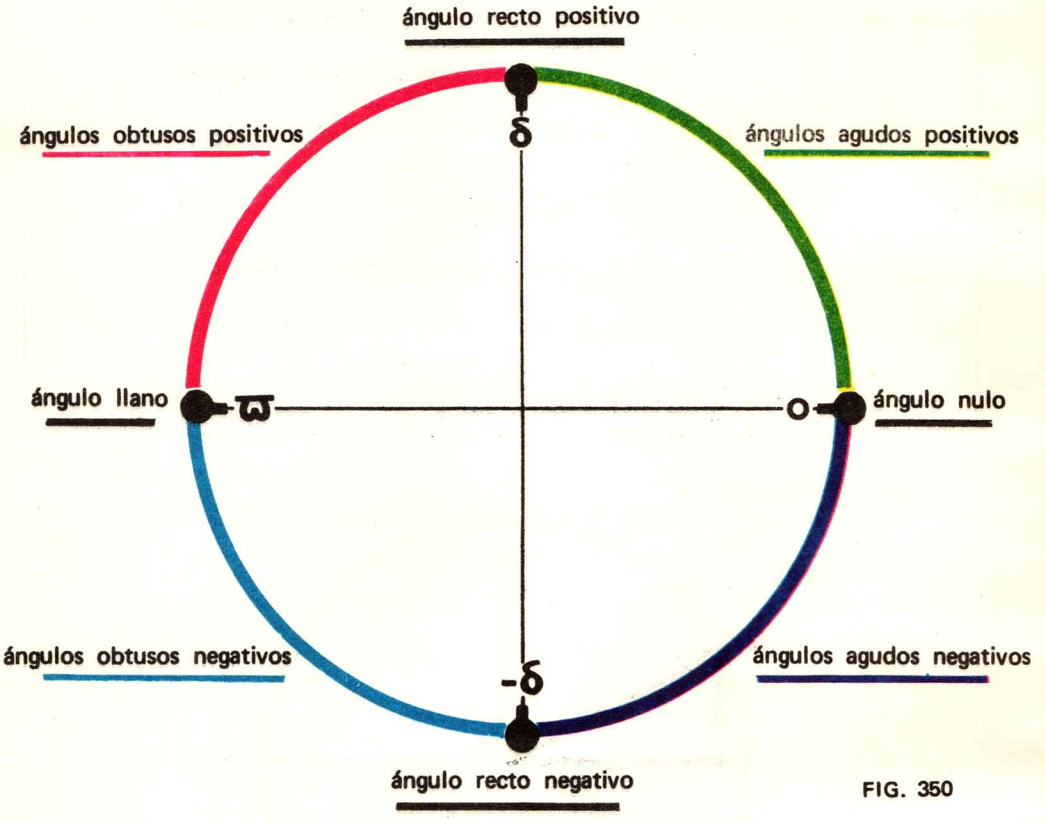


FIG. 350

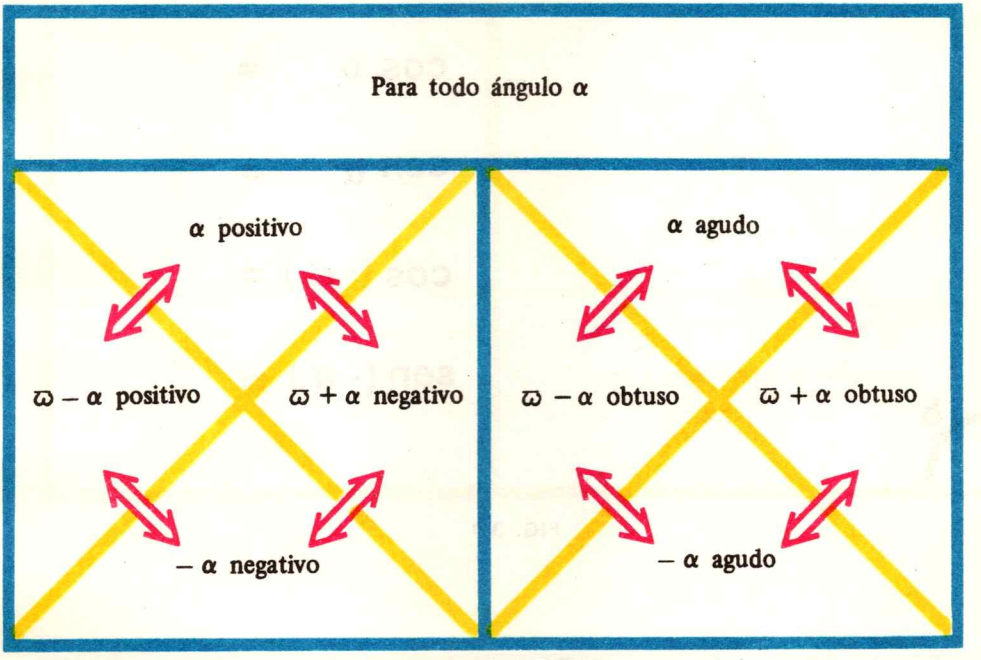
$\forall\ \alpha \in A$

α nulo	$\Leftrightarrow$	$\cos \alpha = 1$
α agudo	$\Leftrightarrow$	$\cos \alpha > 0$
α recto	$\Leftrightarrow$	$\cos \alpha = 0$
α obtuso	$\Leftrightarrow$	$\cos \alpha < 0$
α llano	$\Leftrightarrow$	$\cos \alpha = -1$
α positivo	$\Leftrightarrow$	$\operatorname{sen} \alpha \geqslant 0$
α negativo	$\Leftrightarrow$	$\operatorname{sen} \alpha \leqslant 0$

DEFINICIONES Y FORMULAS

EJERCICIOS

1.



2. α agudo positivo $\Longleftrightarrow$ •••

α ••• $\Longleftrightarrow$ •••

•••

13 — EJERCICIOS

1.

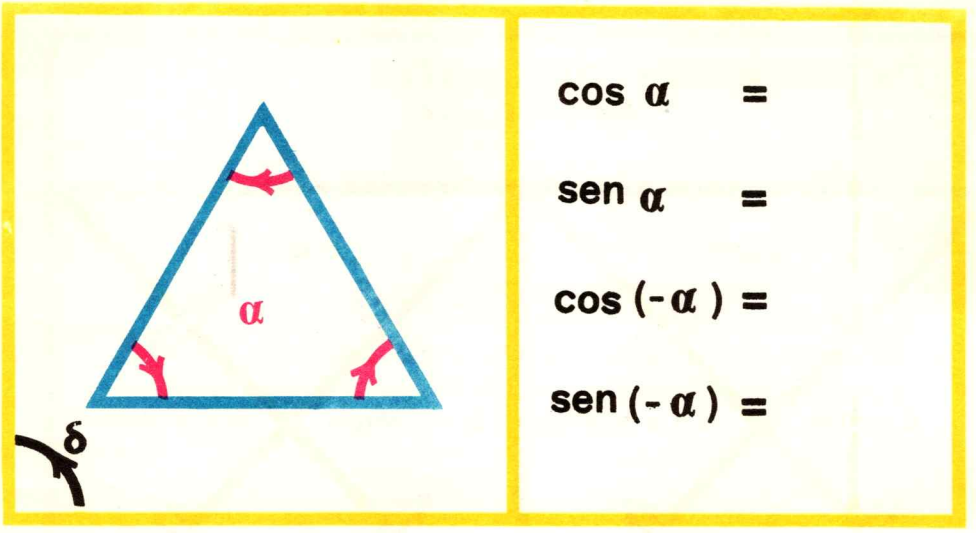


FIG. 351

2.

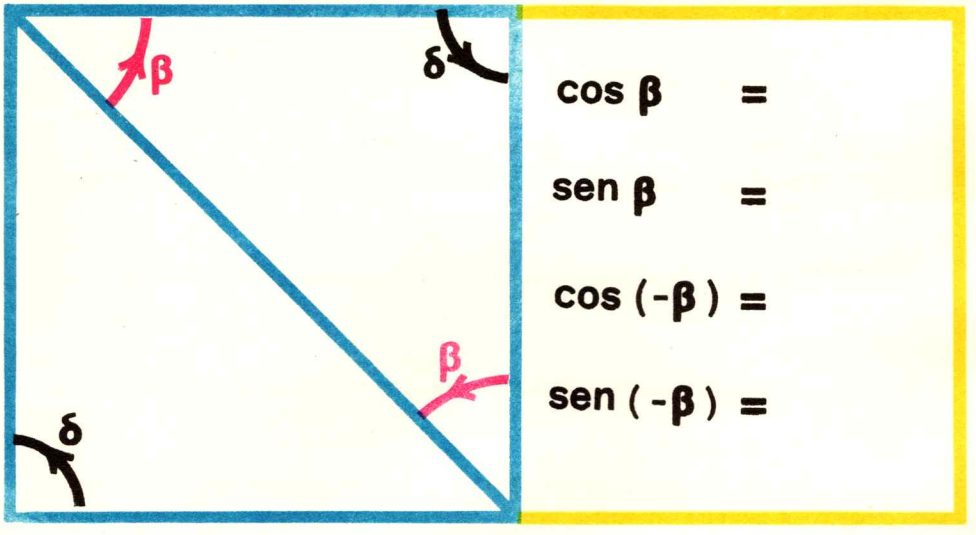


FIG. 352

19

Ecuaciones normales

1 – DISTANCIA ORIENTADA DE UN PUNTO A UNA RECTA

He aquí una recta que representa el nivel del mar.

La altura de todo punto es un *número real*

positivo para los puntos situados sobre el nivel del mar,

negativo para los puntos situados bajo el nivel del mar.

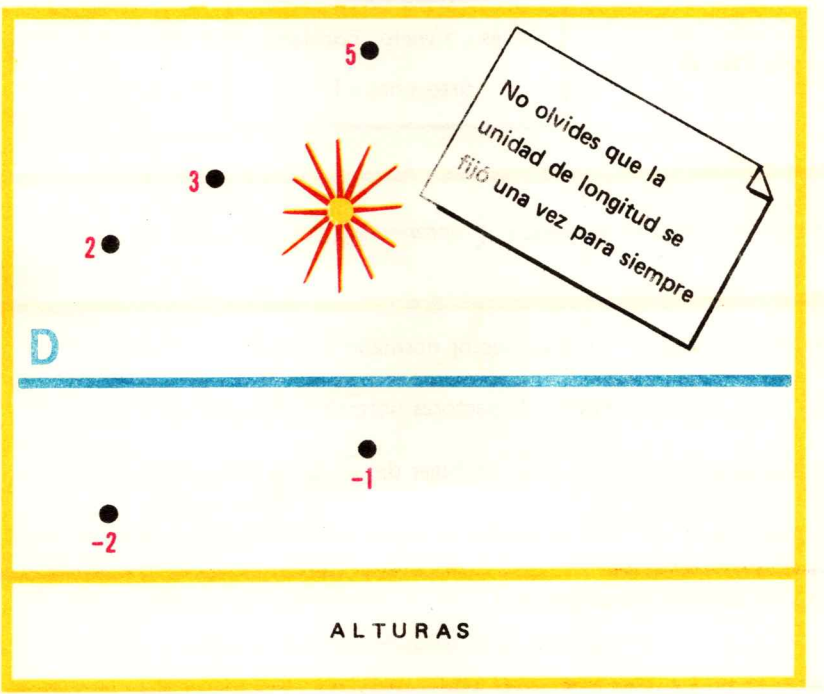
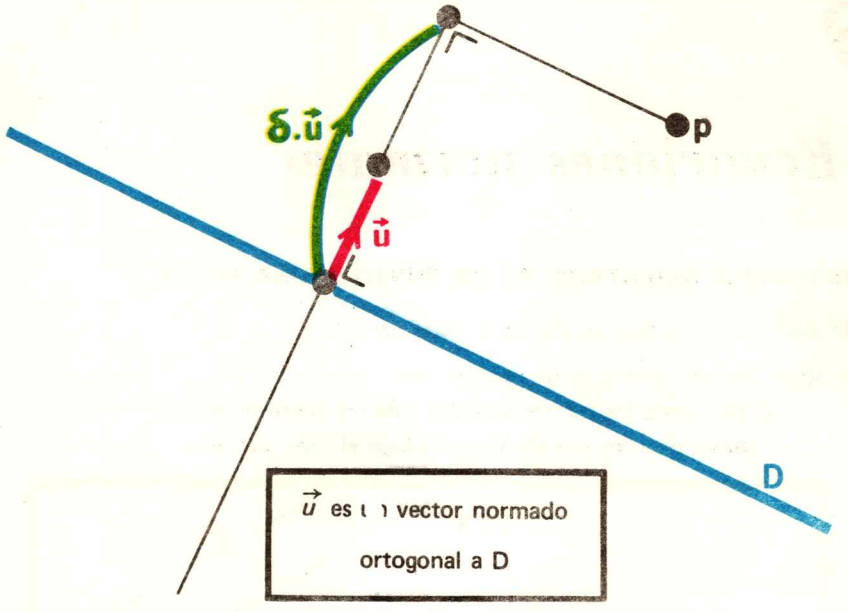


FIG. 353

Nos inspiraremos en la noción de altura para definir la **distancia** (orientada) de un punto a una recta.

DEFINICION



δ *es* **la distancia orientada** (*representada por* δ(p , D)) *de* **p** *a* D

FIG. 354

En esta definición, $\vec{u}$ es un vector normado ortogonal a D

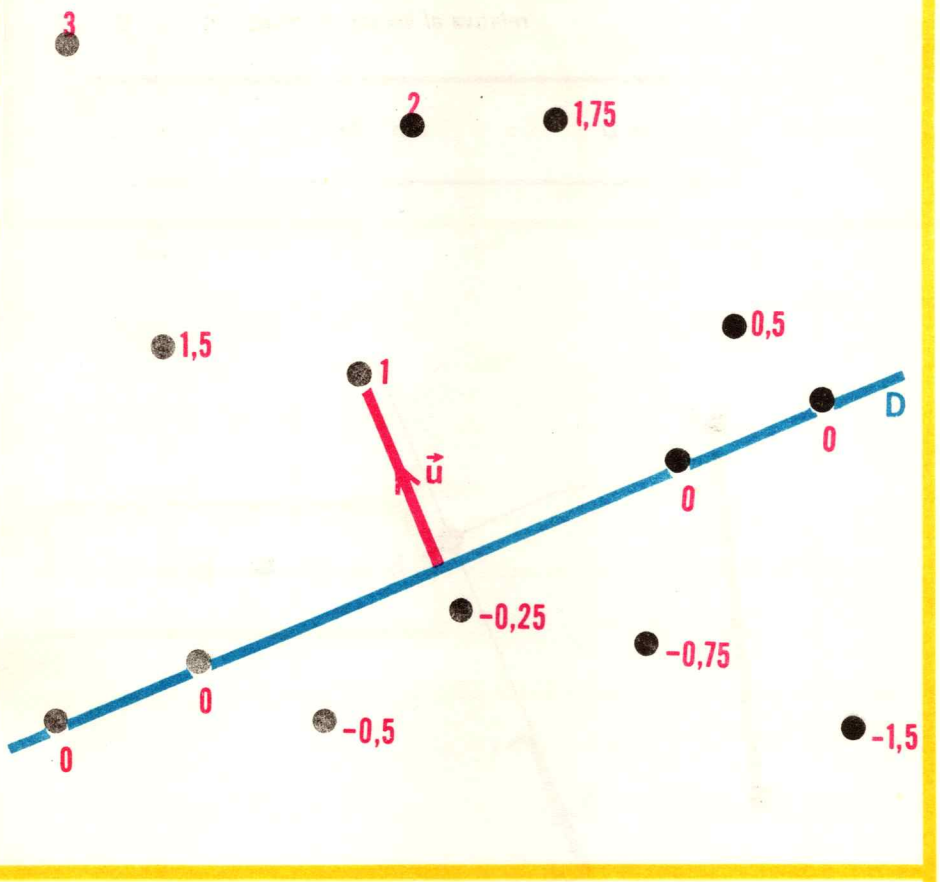
$\{\vec{u}, -\vec{u}\}$ es el conjunto de vectores normados ortogonales a D

Se habría podido tomar $-\vec{u}$ en lugar de $\vec{u}$ en la definición.

Al pasar de $\vec{u}$ a $-\vec{u}$, se cambia de signo a todas las distancias orientadas.

El signo de la distancia orientada a la recta D
depende de la elección del vector normado $\vec{u}$ *ortogonal a* D

El valor absoluto de la distancia orientada a la recta D
es igual
a la distancia a la recta



Distancias orientadas a la recta D

relativas al vector normado $\vec{u}$ *ortogonal a* D

FIG. 355

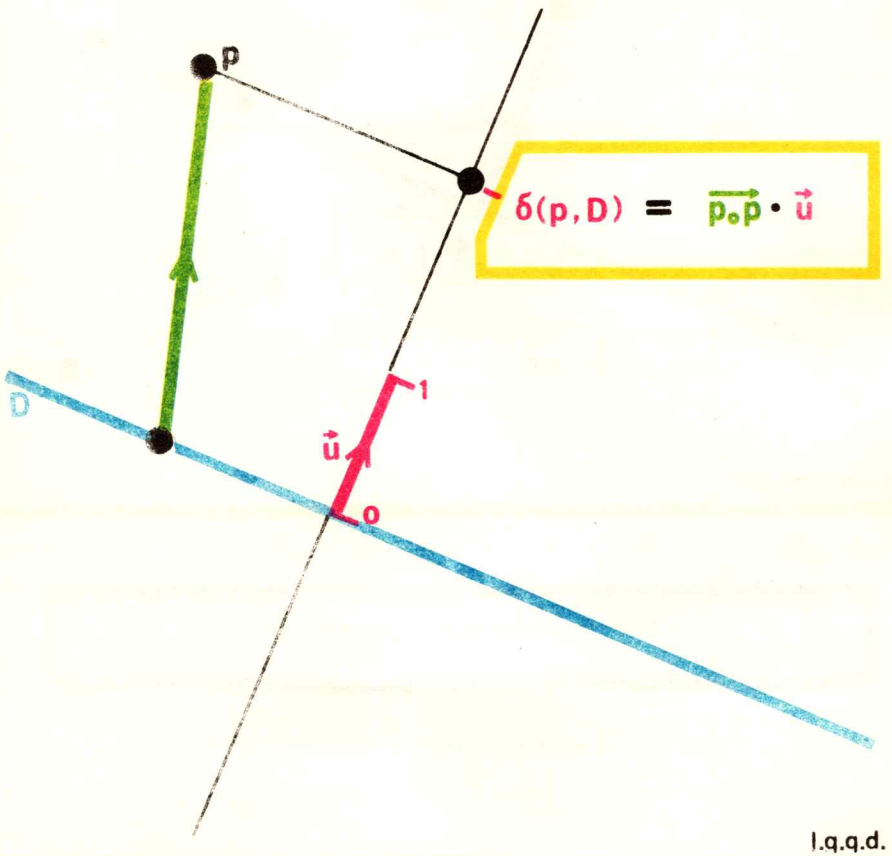
PROPOSICION

Si $\delta(p\ ,\ D)$ *designa la distancia del punto* **p** *a la recta* D

relativa al vector normado $\vec{u} \perp D$

Entonces $\forall\ p_0 \in D \quad : \quad \delta(p\ ,\ D) \quad = \quad \overrightarrow{p_0\,p} \cdot \vec{u}$

DEMOSTRACION :



l.q.q.d.

FIG. 356

2 — ECUACIONES NORMALES (BASE ORTONORMAL)

Una base ortonormal $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ fijada una vez para siempre, identifica Π_0 a $\mathbf{R}^2$

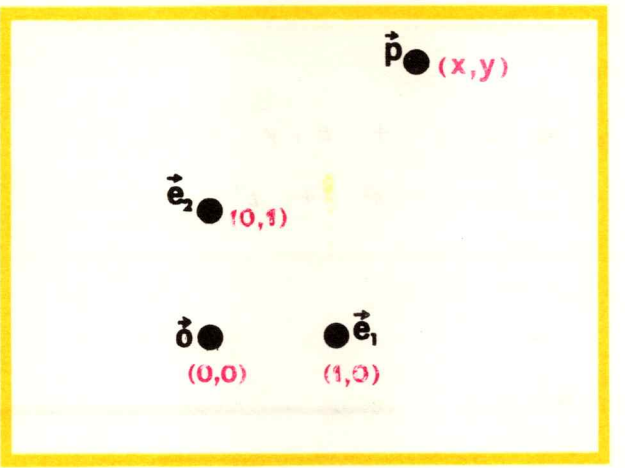


FIG. 357

Si tenemos una recta $D \equiv m \cdot x + n \cdot y + q = 0$

con $m \neq 0$ ó $n \neq 0$

es decir $m^2 + n^2 \neq 0$

Y concretando

$k \in \mathbf{R}_0 \quad : \quad D \equiv km \cdot x + kn \cdot y + kq = 0$

Ello será cierto en particular para

$$k = \frac{1}{\sqrt{m^2 + n^2}}$$

$$D \equiv \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}} \cdot x + \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}} \cdot y + \frac{q}{\sqrt{m^2 + n^2}} = 0$$

Y haciendo

$$a = \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}} \qquad b = \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}} \qquad c = \frac{q}{\sqrt{m^2 + n^2}}$$

se obtiene

$$D \equiv a \cdot x + b \cdot y + c = 0$$

con $a^2 + b^2 = 1$

DEFINICION

La ecuación $a\,x + b\,y + c = 0$ *es* **normal**

ssi

$a^2 + b^2 = 1$

$\forall\ a\ ,\ b\ ,\ c \in \mathbf{R}$

La ecuación $a\,x + b\,y + c = 0$ **es normal**

ssi

La ecuación $-a\,x - b\,y - c = 0$ **es normal**

Toda recta admite DOS ecuaciones normales.

He aquí la recta D de ecuación normal

$$D \equiv a\,x + b\,y + c = 0$$

El vector *normado* $(-b\ ,\ a)$ es paralelo a D

El vector *normado* $\vec{u} = (a\ ,\ b)$ es ortogonal a $(-b\ ,\ a)$

es ortogonal a D

Problema

He aquí el punto p *de coordenadas* $(\xi\ ,\ \eta)$

Calcular la distancia orientada $\delta(p\ ,\ D)$

relativa al vector normado $\vec{u} = (a\ ,\ b)$

Solución :

He aquí un punto p_0 de coordenadas $(\xi_0\ ,\ \eta_0)$ perteneciente a D

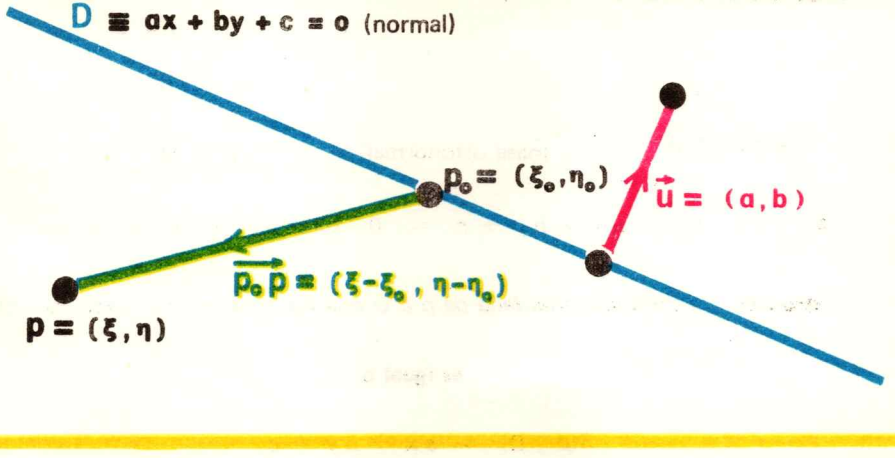


FIG. 358

$p_0 \in D$; **entonces** $a\,\xi_0 + b\,\eta_0 + c = 0$

$$-a\,\xi_0 - b\,\eta_0 = c$$

Por la proposición del § 1

$$\delta(p\,,\,D) = \overrightarrow{p_0p} \quad \vec{u}$$

$$= (\xi - \xi_0\,,\,\eta - \eta_0) \quad (a\,,\,b)$$

$$= (\xi - \xi_0)\,a + (\eta - \eta_0)\,b$$

$$\delta(p\,,\,D) = a\,\xi + b\,\eta + (-a\,\xi_0 - b\,\eta_0)$$

$$\delta(p\,,\,D) = a\,\xi + b\,\eta + c$$

Acabamos de probar el

TEOREMA — (base ortonormal) — $D \in \mathfrak{D}$; $p \in \Pi$

Si $D \equiv a\,x + b\,y + c = 0$ (normal) y $p = (x\,,\,y)$

Entonces *la distancia orientada de p a* D *relativa al vector normado* $(a\,,\,b)$

es igual a

$$\delta(p\,,\,D) = a\,x + b\,y + c$$

3 — EJERCICIOS

Bases ortonormadas

DEFINICION

La distancia del punto **p** *a la recta* D

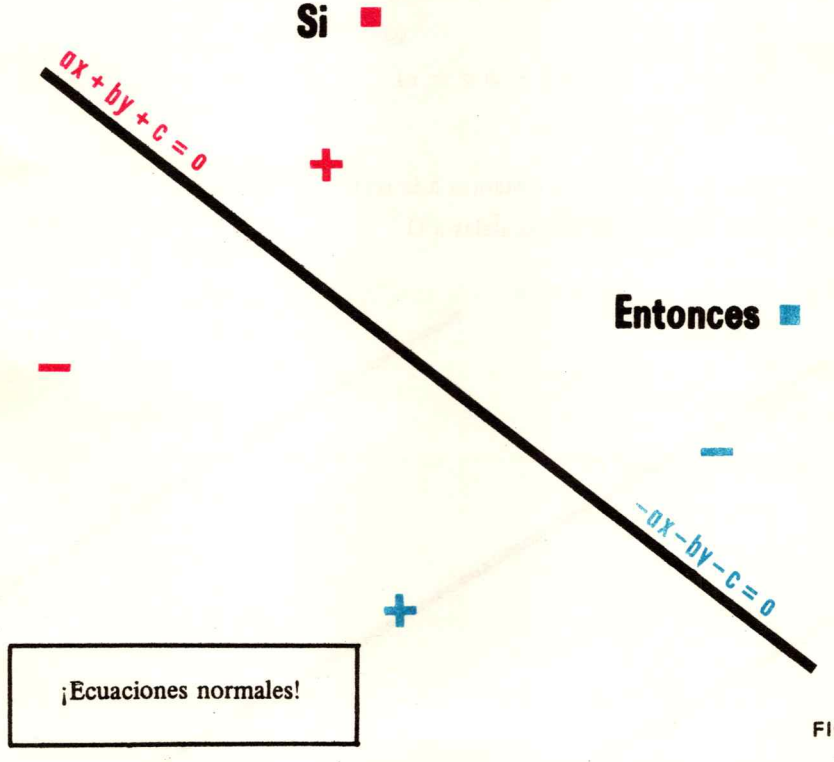
relativa al vector no nulo $\vec{v} \perp D$

es igual

a la distancia del punto **p** *a la recta* D

relativa al vector normado de $\vec{v}$

1.



¡Ecuaciones normales!

FIG. 359

¡Explica y justifica!

2. **Si** la recta D se halla definida por la ecuación normal $a x + b y + c = 0$

Entonces $|a \xi + b \eta + c|$ es la **distancia** (absoluta) de (ξ, η) a D

3. Calcula las distancias relativas al vector $(2, 3)$
de los puntos $(4, 7), (1, 1), (0, 0), (5, 0), (-3, 0)$
a la recta $D \equiv 2x + 3y - 5 = 0$

4. Calcula las *distancias* de los puntos $(-2, 5), (-2, 1), (0, -7)$
a la recta $D \equiv 3x - y + 7 = 0$

5. **Si** la recta D se halla definida por la ecuación normal $ax + by + c = 0$

Entonces la distancia (absoluta) de (ξ, η) a D es igual $p \in \mathbb{R}^+$

ssi

$$a\xi + b\eta + c = p \quad \text{o} \quad a\xi + b\eta + c = -p$$

ssi

$$(a\xi + b\eta + c)^2 - p^2 = 0$$

6. El conjunto de puntos cuya distancia a la recta D es igual a $p \in \mathbb{R}^+$ es la reunión de una cupla de rectas paralelas a D

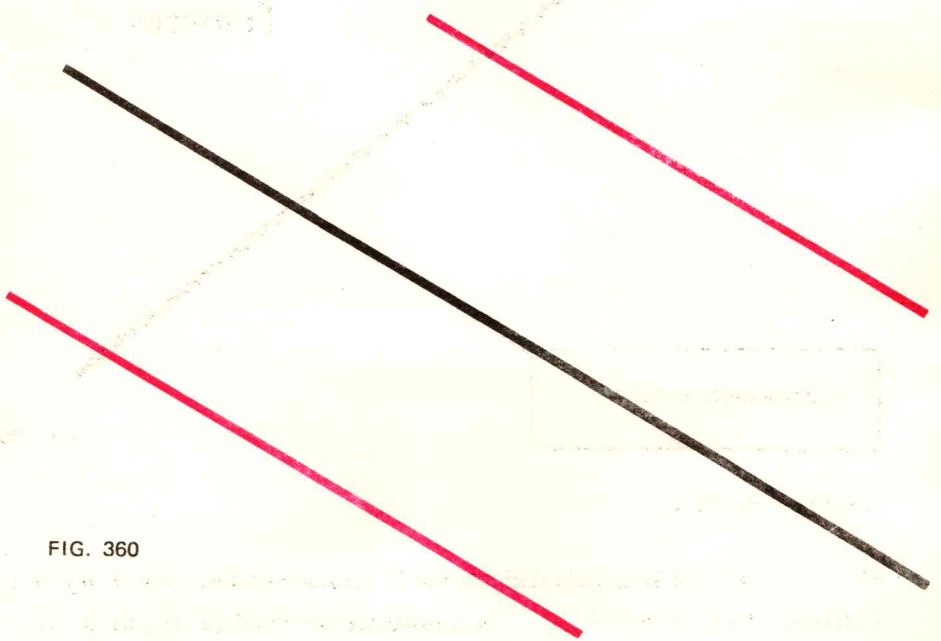


FIG. 360

7. He aquí las rectas A , B definidas por las ecuaciones normales

$$A \equiv a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 = 0$$
$$B \equiv b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 = 0$$

Por comodidad escribiremos

$$\alpha \text{ por } a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3$$
$$\beta \text{ por } b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3$$

Si E designa el conjunto de puntos cuya **distancia** a A es igual a la **distancia** a B

Entonces

$$E = \{ (x_1 , x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid \alpha^2 - \beta^2 = 0 \}$$
$$= \{ (x_1 , x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid \alpha - \beta = c \} \cup \{ (x_1 , x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid \alpha + \beta = 0 \}$$

8. Discutir los resultados del ejercicio 7.

Si $A = B$

Entonces supondremos $a_1 = b_1 \ , \ a_2 = b_2 \ , \ a_3 = b_3$

$$\{ (x_1 , x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid \alpha - \beta = 0 \} = \Pi$$

$$E = \Pi$$

Si $A \parallel B$ y $A \neq B$

Entonces supondremos $a_1 = b_1 \ , \ a_2 = b_2 \ , \ a_3 \neq b_3$

$$\{ (x_1 , x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid \alpha - \beta = 0 \}$$
$$= \{ (x_1 , x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid a_3 - b_3 = 0 \} = \phi$$

$$\{ (x_1 , x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid \alpha + \beta = 0 \}$$
$$= \{ (x_1 , x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid 2a_1 x_1 + 2a_2 x_2 + a_3 + b_3 = 0 \} \in \text{dir A}$$

$$E \equiv 2a_1 x_1 + 2a_2 x_2 + a_3 + b_3 = 0$$

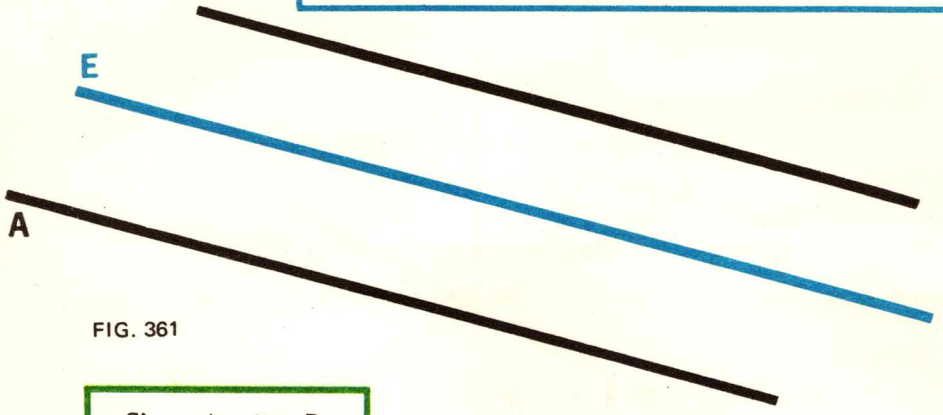


FIG. 361

Si A ∦ B Entonces $a_1 \neq \pm b_1$ $a_2 \neq \pm b_2$

$$\{ (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid \alpha - \beta = 0 \}$$
$$= \{ (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid (a_1 - b_1)x_1 + (a_2 - b_2)x_2 + (c_1 - c_2) = 0 \}$$

es una recta D_1

$$\{ (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid \alpha + \beta = 0, \}$$
$$= \{ (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid (a_1 + b_1) x_1 + (a_2 + b_2) x_2 + (c_1 + c_2) = 0 \}$$

es una recta D_2

$$(a_1 - b_1)(a_1 + b_1) + (a_2 - b_2)(a_2 + b_2)$$
$$= a_1^2 - b_1^2 + a_2^2 - b_2^2$$
$$= (a_1^2 + a_2^2) - (b_1^2 + b_2^2)$$
$$= 1 - 1$$ (pues las ecuaciones son normales)
$$= 0$$

Por tanto $D_1 \perp D_2$

Además $D_1 \cap D_2 = A \cap B$

E *es la reunión de dos rectas perpendiculares cuyo punto de intersección es el mismo que el de* A *y* B

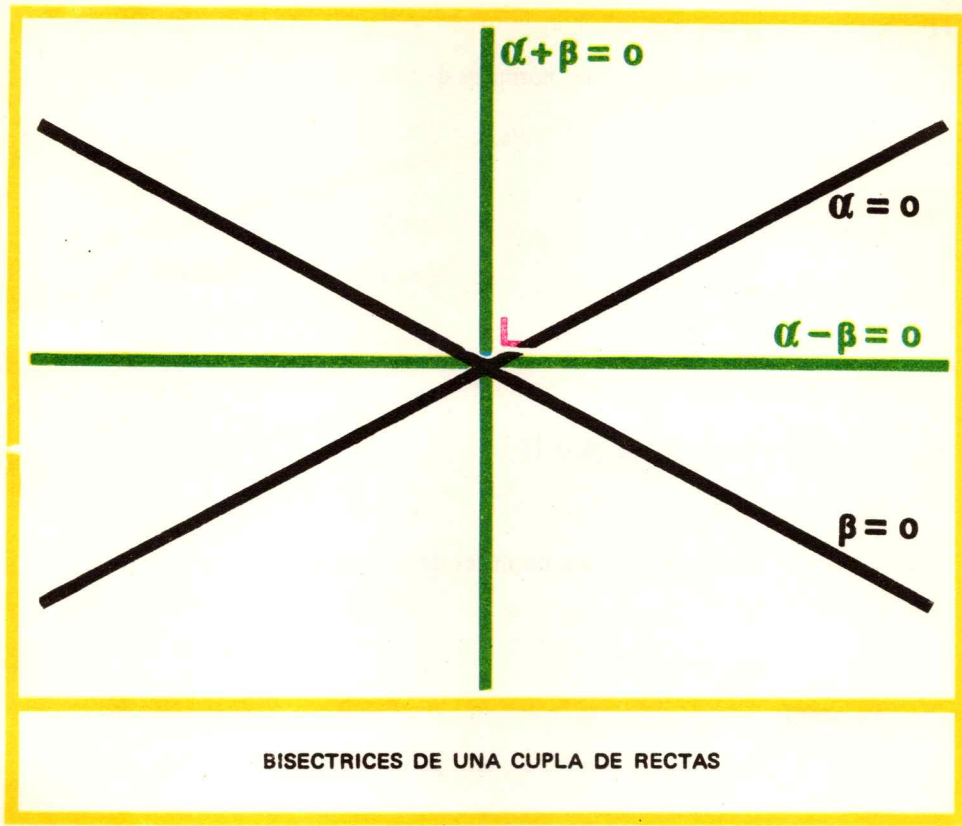


FIG. 362

9. Ecuación de las bisectrices de cuplas de rectas

$x = 0$	$y = 0$
$x = 2$	$y = 3$
$2x + 3y = 0$	$5x - 7y = 0$
$x + 2y + 3 = 0$	$3x - 5y + 4 = 0$
$y = 2x + 3$	$y = x - 7$

10. Ecuación de la recta de puntos igualmente distantes de las rectas

$2x + 3y + 5 = 0$ $\qquad$ $4x + 6y + 17 = 0$

11. **Si** $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 = 0$ y $-a_1 x_1 - a_2 x_2 - a_3 = 0$

son las ecuaciones normales de la recta A

y $p = (p_1, p_2) \in \Pi \setminus A$

Entonces $a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 > 0 \iff -a_1 p_1 - a_2 p_2 - a_3 < 0$

$a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 < 0 \iff -a_1 p_1 - a_2 p_2 - a_3 > 0$

12. Enuncia brevemente el ejercicio 11

Si $\alpha = 0$ y $-\alpha = 0$.

son las ecuaciones normales de la recta A

y $p \in \Pi \setminus A$

Entonces $\alpha > 0$ en $p \iff -\alpha < 0$ en p

$\alpha < 0$ en $p \iff -\alpha > 0$ en p

13. **Si** la recta A no comprende al punto p

Entonces existe una y sólo una ecuación normal $\alpha = 0$ de la recta A tal que $\alpha > 0$ en p

14. El conjunto de puntos cuya distancia a la recta D respecto al vector $\vec{v} \perp D$ es estrictamente positivo, es un semiplano abierto de borde D

15. He aquí tres puntos no alineados a , b , c

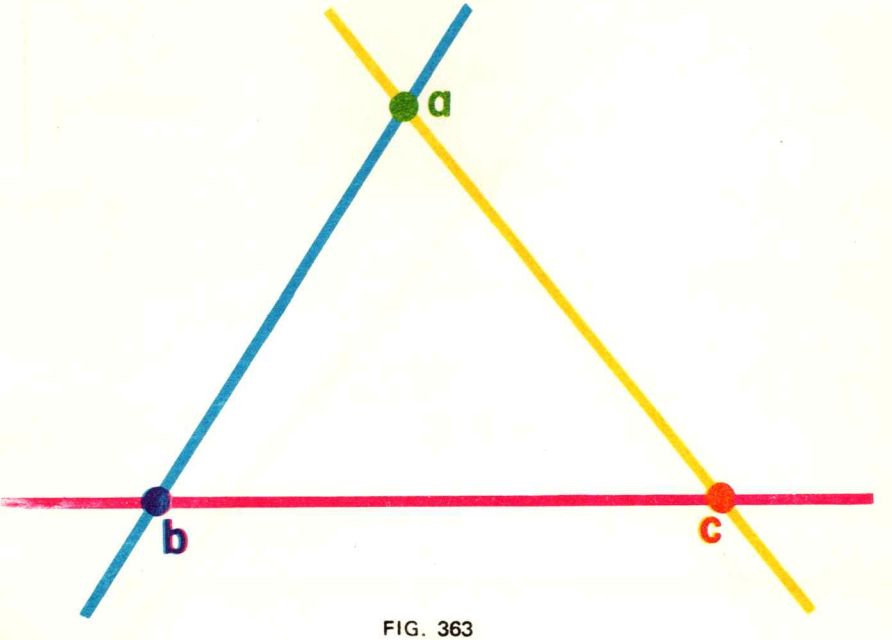


FIG. 363

Indiquemos por $\gamma = 0$ la ecuación normal a la recta ab tal que $\gamma > 0$ en c

Procedamos en idéntica forma para bc y ac

ECUACIONES NORMALES				
ab	$\equiv$	$\gamma = 0$	$\gamma > 0$	en c
ac	$\equiv$	$\beta = 0$	$\beta > 0$	en b
bc	$\equiv$	$\alpha = 0$	$\alpha > 0$	en a

Resumamos esta situación por el siguiente esquema

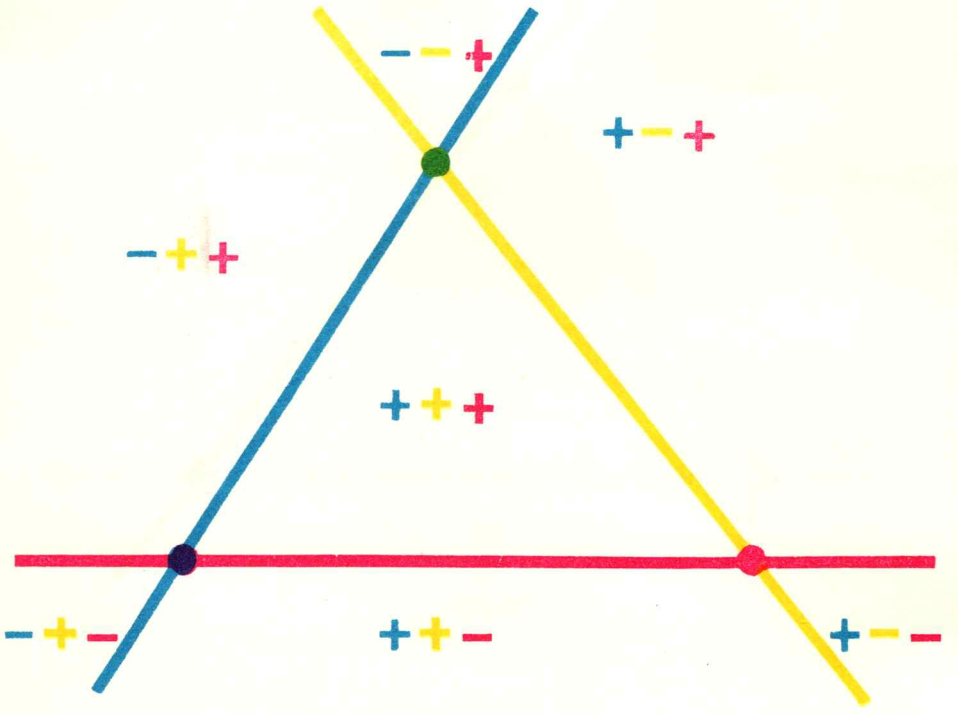


FIG. 364

Hallamos así la **partición** de

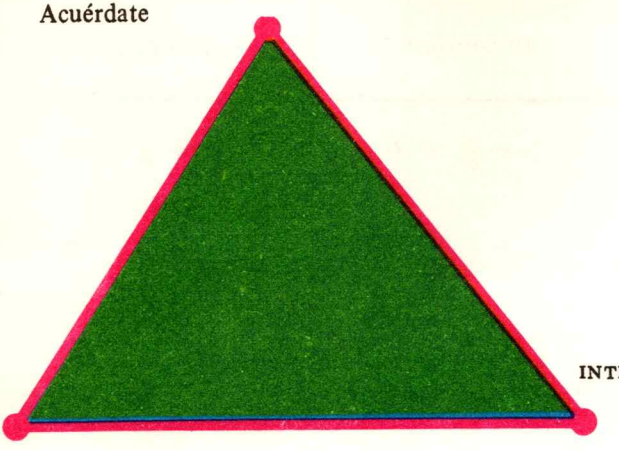
$$\Pi \setminus ab \cup bc \cup ca$$

en 7 **regiones** caracterizadas cada una por una serie de tres signos (+ ó −), la eventualidad − − − excluida.

DEFINICION

La región + + + *se denomina* **interior del triángulo** *a b c'*

Acuérdate



INTERIOR DEL TRIANGULO **a b c**

FIG. 365

16. Notaciones del ejercicio 15.

Las bisectrices de la cupla de rectas ba , ac
son bisectrices del triángulo $a\,b\,c$ que comprenden al vértice a

Ecuaciones de las bisectrices de $b\,a\,c$ que comprenden a a

$$\gamma - \beta = o \qquad \text{y} \qquad \gamma + \beta = o$$

La bisectriz de ecuación

$$\gamma - \beta = o$$

comprende puntos de las solas regiones

$$- - + \qquad + + + \qquad + + -$$

La bisectriz de ecuación

$$\gamma + \beta = o$$

no comprende ningún punto de esas regiones

La bisectriz de ecuación

$$\gamma - \beta = o$$

comprende puntos interiores.

La bisectriz de ecuación

$$\gamma + \beta = o$$

no comprende ningún punto interior al triángulo abc

La bisectriz de ecuación

$$\gamma - \beta = o$$

se denomina **interior**

La bisectriz de ecuación

$$\gamma + \beta = o$$

se denomina **exterior**

BISECTRICES	INTERIORES	EXTERIORES
Vértice a	$\gamma - \beta = 0$	$\gamma + \beta = 0$
Vértice b	$\gamma - \alpha = 0$	$\gamma + \alpha = 0$
Vértice c	$\beta - \alpha = 0$	$\beta + \alpha = 0$

Sabemos que el conjunto de puntos equidistantes de los lados ab , bc , ca comprenden 4 puntos.

Dos bisectrices distintas no son jamás paralelas.

Todo punto común a las rectas de ecuación

$$\gamma - \beta = 0 \qquad \text{y} \qquad \gamma - \alpha = 0$$

pertenece a la recta de ecuación

$$\beta - \alpha = 0$$

Las tres bisectrices interiores se cortan en un punto interior al triángulo.

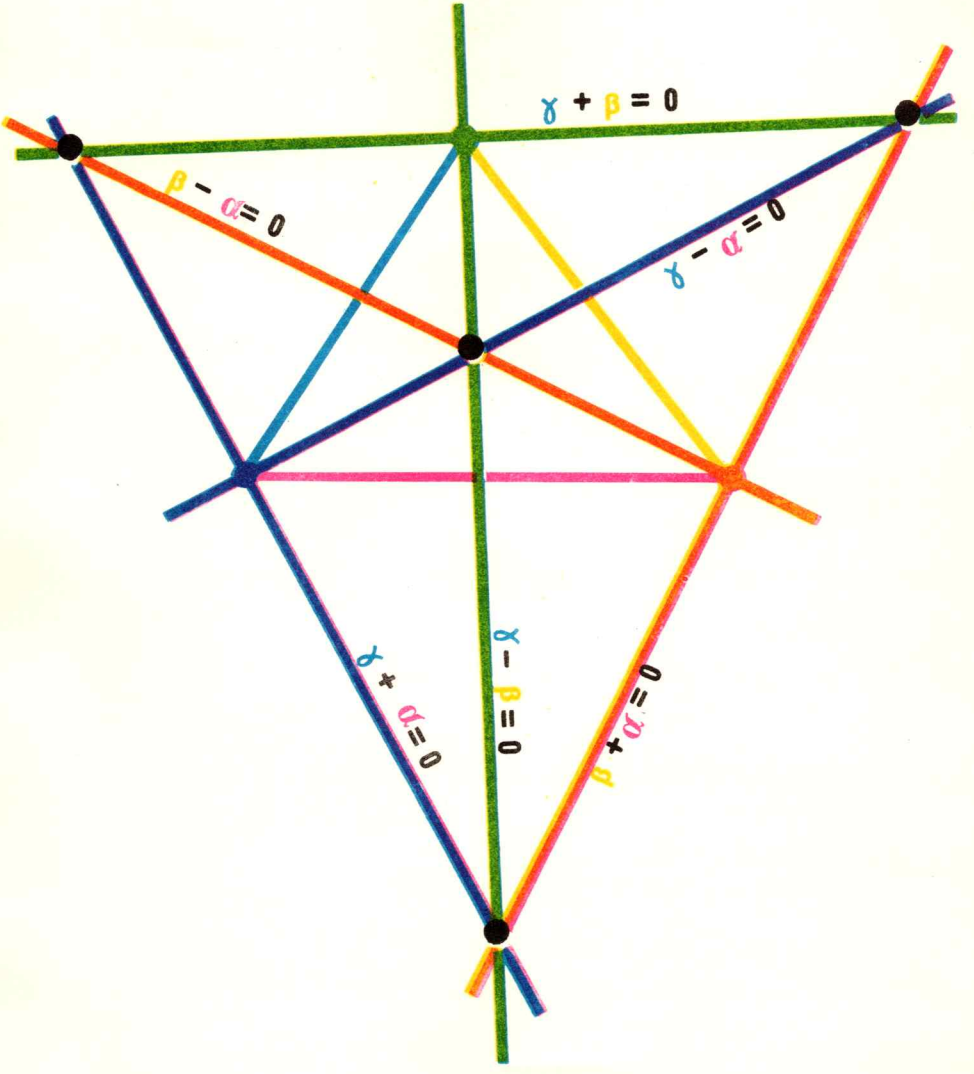
Todo punto común a las dos rectas de ecuación

$$\gamma + \alpha = 0 \qquad \text{y} \qquad \beta + \alpha = 0$$

pertenece a la recta de ecuación

$$\gamma - \beta = 0$$

Dos bisectrices exteriores se cortan en un punto de la bisectriz interior del tercer vértice.



¡Comenta, explica, justifica!

FIG. 366

INDICE
ALFABÉTICO

INDICE ALFABETICO

página

ángulo de una cupla de semirrectas 289
de un desplazamiento 320
de un polígono ordenado . 311
de una rotación 282
exterior de un polígono .. 313
interior de un polígono .. 313
nulo 403
llano 403
anti suplementario 405
complementarios 415
rectos 403
suplementarios 323, 406
eje (— de simetría) 39
bisectriz 42, 91
bisectriz de una cupla de rectas 93, 435
de un triángulo 194
Cauchy, Agustín 264, 278
norma (de un vector) 154
circunferencias 170
coseno de una cupla de vectores .. 205
de un ángulo 399
desplazamiento 66, 73
diámetro 172
distancia 142, 146
orientada de un punto a una recta 423
de un punto a una recta 189, 232
distancia de una terna de puntos . 396
círculos 170
convexidad de 268
rectas (semi-) 76
numeradas 49
perpendiculares 236
ecuación del círculo 382
de segundo grado 369
ecuaciones normales 423, 427
grupo de ángulos 384
de desplazamientos ... 103, 110
de isometrías 51
de rotaciones de mismo centro 90

página

de simetrías centrales y de traslaciones 12
de traslaciones 12
desigualdad de Cauchy-Schwarz .. 264
de Minkowski 265
triangular 266
desigualdades dobles 267
isometría 47, 316
isométricas (cuplas-) 148
(ternas-) 165
longitud (— de un vector) 154
rombo 230
mediatriz 41, 153
metro 142, 146
Minkowski (desigualdad de-) 265
norma (de un vector) 154
orientación (del plano) 414
ortogonalidad 213
paralelismo (criterio de-) 74
paralelogramo 225
perpendicularidad (criterio de-) 58, 73
puntos fijos 69, 72
numerados 5
producto escalar 198,202, 205
(bilinealidad del) . 211
Pitágoras 245
(teorema de) 223
raíz cuadrada 338
rectángulo 228
referencia métrica 146
rebatimiento 117
(el eje de un—) 131
(la simetría de un—) . 131
(la traslación de un-) 131
rotación 68,73, 315
(axioma de la—) 78
(centro de una—) 69
seno 414, 419
vértices (de un polígono) 311
simetría central 1
deslizada 121
ortogonal 37

página

paralela 20
(eje de–) 39, 180
tangente 181
traslación 60, 73
transvección 35
triángulo 194
equilátero 326
isósceles 45
rectángulo 215
(interior de un–) 438
trigonometría (primeros elementos de) 394
vectores (paralelos-) 201
vectorial $\mathbf{R}$, Π_0 , + ... 212

INDICE DE TEMAS

INDICE DE TEMAS

pág.

CAPITULO **1. Simetrías centrales**

1. Simetrías centrales 1
2. Compuesta de una cupla de simetrías centrales 3
3. Convención de puntos numerados 5
4. Compuesta de una terna de simetrías centrales 9
5. Compuesta de simetrías centrales 10
6. El grupo de simetrías centrales y de traslaciones 12
7. Ejercicios 17

CAPITULO **2. Simetrías paralelas**

1. Simetrías paralelas 20
2. Rectas 22
3. Semirrectas y segmentos 25
4. Semiplanos 27
5. Compuestas de simetrías paralelas 29
6. Semirrectas equipolentes 29
7. Ejercicios 31

CAPITULO **3. Simetrías ortogonales**

1. Simetrías ortogonales 37
2. Eje de simetría 39
3. Mediatriz de un par de puntos 41
4. Bisectriz de una cupla de semirrectas de mismo origen 42
5. Ejercicios 45

CAPITULO **4. Isometrías**

1. Isometrías 47
2. Convención de rectas numeradas 49
3. El grupo de isometrías 51
4. Simetrías centrales 56
5. Criterio de perpendicularidad 58
6. Traslaciones 60
7. Ejercicios 63

CAPITULO **5. Desplazamientos**

1. Desplazamientos 66
2. Rotaciones 68

3. Centro de rotación 69
4. Puntos fijos 72
5. Clasificación de los desplazamientos 73

CAPITULO 6. Rotaciones

1. Semirrectas 76
2. Axioma de la rotación 78
3. Teorema de las tres simetrías 82
4. Tres sambas 85
5. El grupo de rotaciones de centro o 90
6. Bisectriz 91
7. Bisectrices de una cupla de rectas de D_o 93
8. Ejercicios 98

CAPITULO 7. Grupo de desplazamientos

1. Compuesta de una cupla de traslaciones 103
2. Compuesta de una cupla de rotaciones 104
3. Compuesta de una rotación y de una traslación 107
4. Compuesta de una traslación y de una rotación 109
5. Compuesta de una cupla de desplazamientos 110
6. El grupo de desplazamientos 110
7. Clasificación de las isometrías 115
8. Desplazamientos e inversiones 118

CAPITULO 8. Rebatimientos

1. Isometrías 120
2. Simetrías deslizadas 121
3. Rebatimientos = simetría deslizada 128
4. Las simetrías entre las inversiones 132
5. Rebatimiento definido por una cupla de semirrectas 134
6. Ejercicios 137

CAPITULO 9. Distancia

1. Introducción 142
2. Isometrías definidas por una cupla de semirrectas 144
3. Definición de la distancia 146
4. Cuplas isométricas 148
5. Simetría de la distancia 150
6. Distancia y abscisas 152
7. Mediatriz 153

8. Longitud de un vector 154
9. Multiplicación escalar y norma 156
10. Isometrías y semiplanos 159
11. Ternas isométricas 165
12. Cambio de metro y distancia 168

CAPITULO **10. Circunferencias**

1. Circunferencias y círculos 170
2. Circunferencias que comprenden dos puntos distintos a y b 173
3. Circunferencia definida por tres puntos no alineados 176
4. Centro y ejes de simetría de una circunferencia, de un círculo abierto, de un círculo cerrado 180
5. Tangente 181
6. Perpendicularidad y circunferencia 184
7. Las isometrías conservan la perpendicularidad 186
8. Distancia de un punto a una recta 189
9. Ejercicios 193

CAPITULO **11. Producto escalar**

1. Producto escalar de vectores paralelos 198
2. Bilinealidad del producto escalar de vectores paralelos 201
3. Definición del producto escalar 202
4. Asociatividad mixta del producto escalar 204
5. Coseno de una cupla de vectores no nulos 205
6. Bilinealidad del producto escalar 211
7. Vectorial euclidiano plano 212
8. Ortogonalidad 213
9. Triángulos rectángulos 215
10. Ejercicios 218

CAPITULO **12. Cálculo en el vectorial euclidiano plano**

1. Pequeño formulario 220
2. Teorema de Pitágoras 223
3. Paralelogramo 225
4. Rectángulo 228
5. Rombo 230
6. Distancia de un punto a una recta 232
7. Cálculo del producto escalar en ejes rectangulares 234
8. Rectas perpendiculares 236
9. Cambio de unidad de longitud 238
10. Ejercicios 239

PITAGORAS 245

CAPITULO 13. Desigualdades

1. Producto escalar de vectores normados 259
2. Coseno 260
3. Desigualdad de Cauchy-Schwarz 264
4. Desigualdad de Minkowski 265
5. Desigualdad triangular 266
6. Desigualdades dobles 267
7. Convexidad de círculos 268
8. Círculos abiertos 270
9. Ejercicios 273

AGUSTIN CAUCHY 278

CAPITULO 14. El grupo de los ángulos

1. Angulo de una rotación 282
2. Angulo de una cupla de semirrectas 289
3. Conjunto de ángulos 295
4. Adición de ángulos 296
5. Grupos de ángulos 298

CAPITULO 15. Cálculo en el grupo de ángulos

1. Cálculo en el grupo de ángulos 301
2. Las dos mitades de todo ángulo 303
3. Angulos de un polígono ordenado 311
4. Simetrías y rotación 315
5. Simetrías 316
6. Angulo de un desplazamiento 320
7. Ejercicios 323

CAPITULO 16. Raíz cuadrada

1. Raíz cuadrada 338
2. Multiplicación y orden 349
3. Ejercicios 351
4. Cálculo práctico de la raíz cuadrada 355
5. Cálculo numérico 363
6. Ecuación de segundo grado 369

CAPITULO 17. Circunferencia y rectas

1. Circunferencias y rectas 374
2. Cálculo de la distancia 379

3. Ecuación de la circunferencia (Base ortonormal) 380
4. Intermedio 381
5. Cupla de circunferencias 383
6. Distancia de una terna de puntos 396

CAPITULO **18. Primeros elementos de trigonometría**

1. Coseno de un ángulo 399
2. Angulo nulo-ángulo llano-ángulos rectos 403
3. Coseno del opuesto de un ángulo 404
4. Angulos antisuplementarios 405
5. Angulos suplementarios 406
6. Representación de ángulos 407
7. Coseno (recapitulación) 410
8. Orientación del plano 414
9. Angulos complementarios 415
10. Seno 416
11. Coseno y seno 419
12. Clasificación de los ángulos 420
13. Ejercicios 422

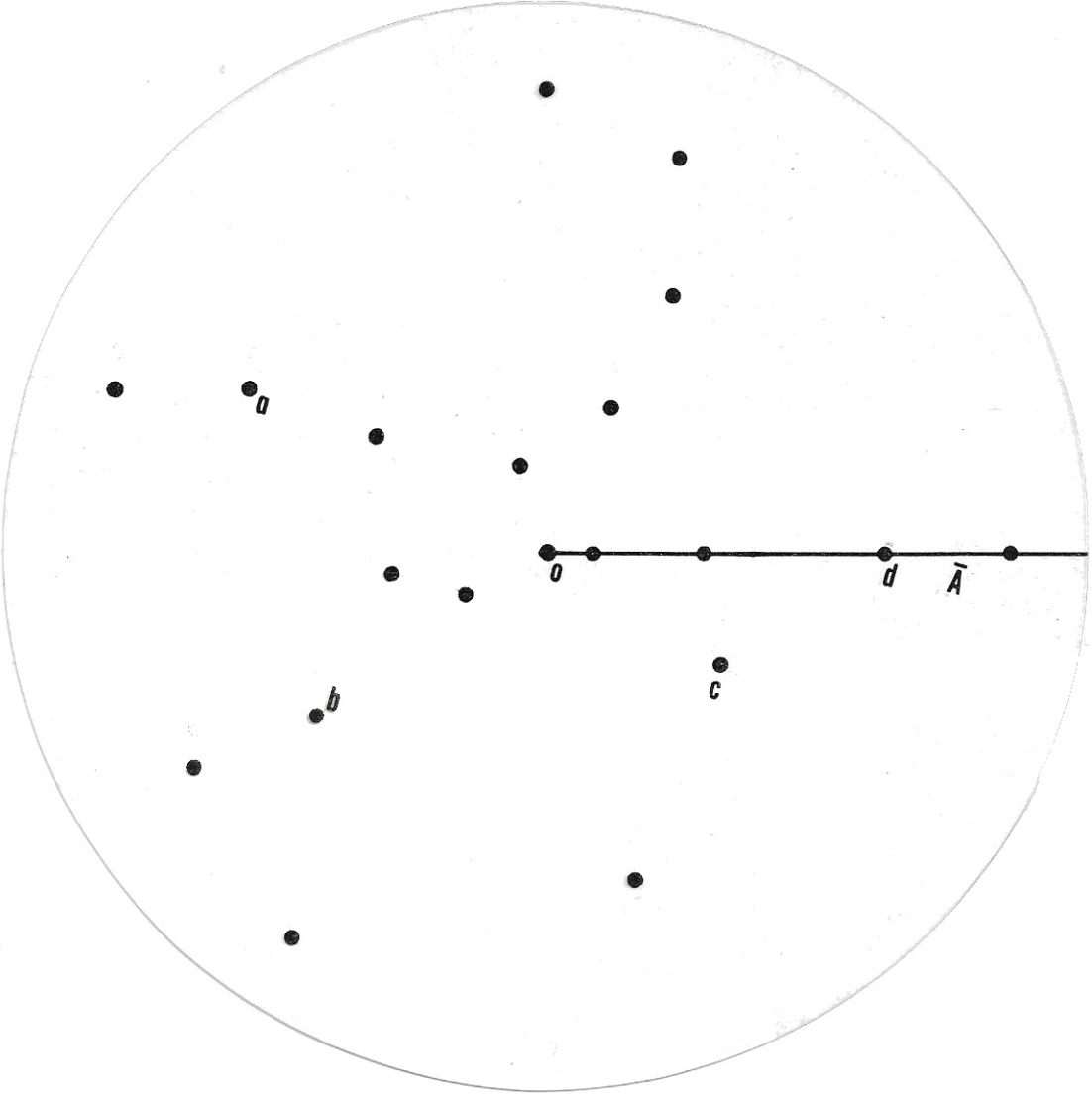
CAPITULO **19. Ecuaciones normales**

1. Distancia orientada de un punto a una recta 423
2. Ecuaciones normales (Base ortonormal) 427
3. Ejercicios 431

INDICE 443

INDICE DE TEMAS 447

La EDITORIAL UNIVERSITARIA S.E.M., dio término a la impresión de esta obra en el mes de enero de 1971, en los Talleres Gráficos de Pablo Paoppi e Hijos S.A., Santo Domingo 2265, Buenos Aires.


a
o
d
Ā
b
c

rectas, primeros elementos de trigonometria y ecuaciones normales. Cada uno de ellos está acompañado de una serie de interesantes ejercicios programados.

Si bien los temas expuestos en esta obra son de gran trascendencia en la matemática moderna, su mérito fundamental consiste en el uso de recursos pedagógicos novedosos que hacen más accesible la materia. Los esquemas multicolores, los ejemplos inspirados en la vida cotidiana, las demostraciones mediante filmes, la simplicidad que domina toda la obra, son medios didácticos de gran valor, compatibles con el más severo rigor matemático.

Georges Papy se doctoró en matemática en la Universidad de Bruselas y pronto enseñó allí y en otras universidades extranjeras. Consagrado a la reforma de la enseñanza de la matemática en la escuela secundaria, desde 1961 dirige el Centro Belga de Pedagogía de la Matemática.

OTROS TÍTULOS DE EUDEBA

Enseñanza de la matemática moderna - C. A. Trejo y J. Bosch
(Para el primero y segundo curso)

Ciclo medio de matemática moderna - C. A. Trejo y J. Bosch
(Para el primero, segundo y tercer curso)

Álgebra para escuelas secundarias - O. Varsavsky

Introducción al álgebra, nociones de álgebra lineal - M. Cotlar y C. Ratto de Sadosky

Introducción a la teoría de conjuntos L. Oubiña

AXIOMA DE LA ROTACION
fig. 90, pág. 78

EDITORIAL UNIVERSITARIA DE BUENOS AIRES